



Propostas de Atividades para o Ensino de Matemática Contextualizada na Astronomia

Mestrando: Welberton Rios da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marildo Geraldête Pereira

Coorientador: Prof. Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho



Manual de atividades

WELBERTON RIOS DA SILVA

Produto educacional da dissertação de mestrado apresentado ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Astronomia da UEFS.

Orientador: Profº Dr. Marildo Geraldête Pereira

Coorientador: Profº Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

S584p Silva, Welberton Rios da
Proposta de atividades para o ensino de matemática contextualizada na Astronomia: manual de atividades./ Welberton Rios da Silva. Feira de Santana, 2023.
54 f.: il.

Produto da dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Estadual de Feira de Santana, Mestrado Profissional em Astronomia, 2023.

1.Astronomia. 2.Matemática. 3.Planetas. 4.Interdisciplinaridade.
I.Pereira, Marildo Geraldête, orient. II.Carvalho, Jean Paulo dos Santos, coorient. III.Universidade Estadual de Feira de Santana. IV.Título.

CDU : 52(07)

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120

APRESENTAÇÃO

Caro colega professor (a), este manual de atividades constituiu o produto educacional proveniente da dissertação de mestrado cujo título “UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA CONTEXTUALIZADA NA ASTRONOMIA” desenvolvido no Programa de Mestrado em Ensino de Astronomia da Universidade Estadual de Feira de Santana – MPASTRO (UEFS).

No decorrer do desenvolvimento da pesquisa, percebemos a necessidade de contextualizar cada vez mais as aulas de matemática tendo em vista as novas diretrizes implementadas na educação através da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a implementação das disciplinas eletivas para o novo Ensino Médio.

Durante as discussões na presente pesquisa percebemos uma falta de interação entre o Ensino da Matemática e a contextualização disponibilizada no Ensino de Astronomia, que descrita na própria BNCC, relata a importância de contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos. Sobre esse aspecto, durante a pesquisa pensamos em relacionar a importância da Matemática no desenvolvimento da Astronomia, em especial na descobertas e cálculos relacionados aos planetas, por ser estudado pelos estudantes desde que entram na idade escolar. Para isso selecionamos alguns conceitos de matemática do Ensino Médio, que poderiam se entrelaçar com o Ensino de Astronomia e aproveitar da sua interdisciplinaridade para tornar o estudo desses tópicos normalmente abordados de maneira abstrata, mais práticas e dinâmicos.

Nesse manual preparamos 7 (sete) propostas de inserção do Ensino de Astronomia em conceitos de Matemática, desde o 1º ano ao 3º ano do Ensino Médio, fazendo referência aos documentos oficiais sobre o tema, e utilizando de contextos históricos, construção de experimentos com materiais de baixo custo e fácil construção, e principalmente fazendo uso de tecnologias educacionais através dos softwares, Geogebra, Stellarium e Universe SandBox, sendo apenas o ultimo não gratuito.

Pensando na otimização do tempo para os professores na utilização deste manual, separamos nos apêndices o passo a passo de cada uma das propostas, desde como baixar e os comando para utilização de cada software, bem como a construção dos experimentos.

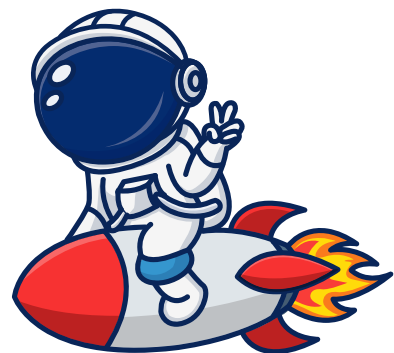
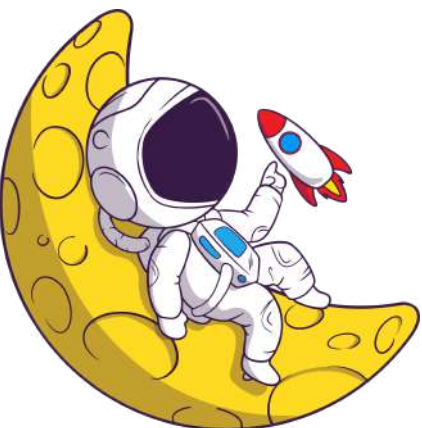
Esperamos que esse manual ajude a popularizar o Ensino de Astronomia entre os alunos de matemática, como também seja um suporte a mais para os colegas professores dinamizarem e tornarem as suas aulas mais atrativas, tendo em vista que os estudantes nessa nova proposta curricular para o Ensino Médio podem escolher quais disciplinas cursar.



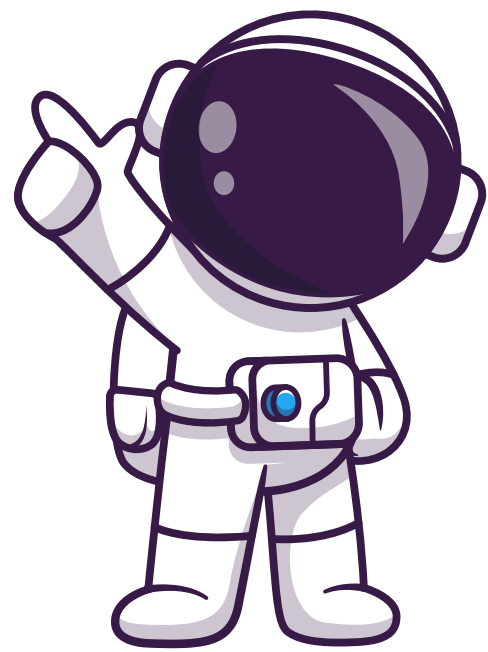
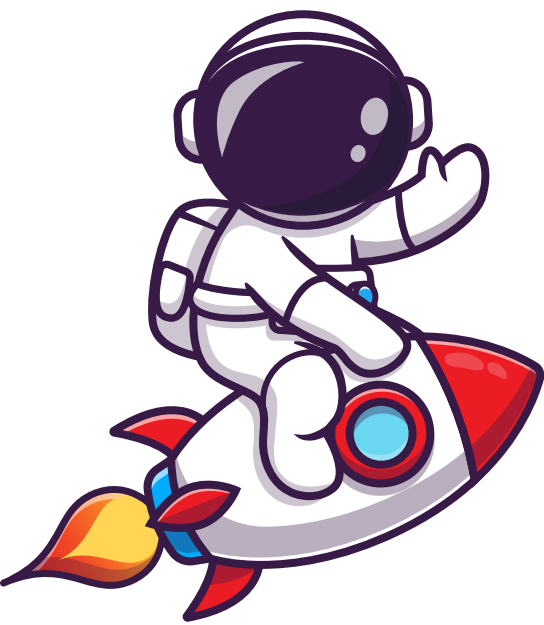
$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



SUMÁRIO



INTRODUÇÃO.....	06
TEMA 01 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E PROPORÇÃO.....	07
TEMA 02 – MEDIÇÃO E ESTUDO DOS ÂNGULOS.....	13
TEMA 03 – ESTUDO DO LOGARITMO.....	19
TEMA 04 – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	23
TEMA 05 – SECÇÕES CÔNICAS.....	28
TEMA 06 – ESTUDO DA PARÁBOLA.....	33
TEMA 07 – ESTUDO DA ELIPSE.....	40
Apêndices.....	46
Referências.....	54

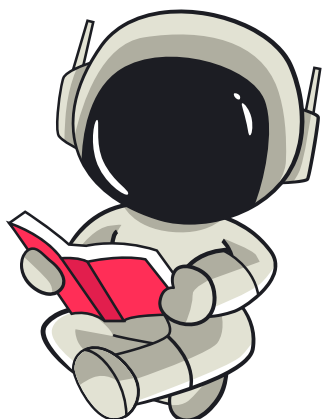


INTRODUÇÃO

A matemática se interliga ao desenvolvimento da própria humanidade, desde as primeiras contagens, a cálculos de algoritmos de inteligência artificial atualmente, e nesse período ela se interligou e colaborou com várias ciências entre elas, a Astronomia. O uso da Matemática para comprovar as observações remonta os primórdios da civilização, ajudando a desenvolver condições para que o ser humano prospere-se. Se estudarmos um pouco dos principais feitos astronômicos, a matemática sempre está presente contribuindo para se mensurar ou contestar hipóteses, desde a criação dos primeiros calendários, a medições do raio da Terra, distâncias entre os planetas e outros astros, entender os movimentos celestes e do nosso planeta, a matemática sempre está presente. Nesse sentido, durante a pesquisa nos deparamos com surpresa sobre um desconhecimento por parte dos participantes sobre essa ligação tão importante, e no que se refere aos professores a perda de uma oportunidade de contextualizar suas aulas, tornando-as mais práticas e dinâmicas e ajudando na melhoria do ensino.

Pensando nessa proposição e conhecendo a realidade do professor, por fazer parte desse universo, propomos sete temáticas sobre o Ensino de Astronomia relacionando com conceitos matemáticos do Ensino Médio, trazendo aspectos históricos entre as duas ciências. Realizamos experimentos práticos com uso de material de baixo custo e fácil construção, além do uso de software matemáticos como o Geogebra e de astronomia como Stellarium e Universe SandBox, a fim de proporcionar um atrativo a mais, tendo em vista um cotidiano cada vez mais digital que nossos alunos convivem.

Por fim, destacamos que todas as temáticas propostas foram aplicadas em sala de aula e revisadas no intuito de trazer ao produto didático uma forma prática de inserção delas, atrelado ao apêndice com o passo a passo para realização de cada uma das atividades descritas. Mais detalhes sobre as aplicações podem ser vistos na dissertação "UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA CONTEXTUALIZADA NA ASTRONOMIA", com isso esperamos que os professores aproveitem o material e ajudem a divulgar o ensino dessa ciência tão importante para o nosso desenvolvimento como civilização que é a Astronomia.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



TEMA 01 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E PROPORÇÃO

APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

O conceito de proporcionalidade, embora tenha várias aplicações matemáticas no cotidiano dos alunos, ainda requer atenção quando se associa esse conceito a semelhanças de figuras planas, entre elas os triângulos. O Teorema Fundamental da Semelhança descreve, que "toda reta paralela a um dos lados do triângulo que intercepta os outros dois lados determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro". Muitos professores usam o artifício de separar o triângulo seccionado por uma reta paralela a sua base em dois triângulos, assim mostrando o caso de semelhança, estabelecendo a relação de proporção entre ambos, conforme Figura 1.1.

Figura 1.1: Descrição geométrica para o Teorema Fundamental da Semelhança



Fonte: Própria do autor

A ideia desse produto é trazer mais uma ferramenta para contextualizar a abordagem dessa temática, associando-a ao desenvolvimento da Astronomia, e assim mostrar a importância da matemática para a evolução dessa ciência.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC, no Ensino Médio, contempla relações em que a Matemática pode ser aplicada em diversas áreas de conhecimento, incluindo a Astronomia. Em várias habilidades específicas o conceito de semelhança de triângulos e proporção, podem ser relacionados com a Astronomia, a saber.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

HABILIDADE (EM13MAT103)

Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.

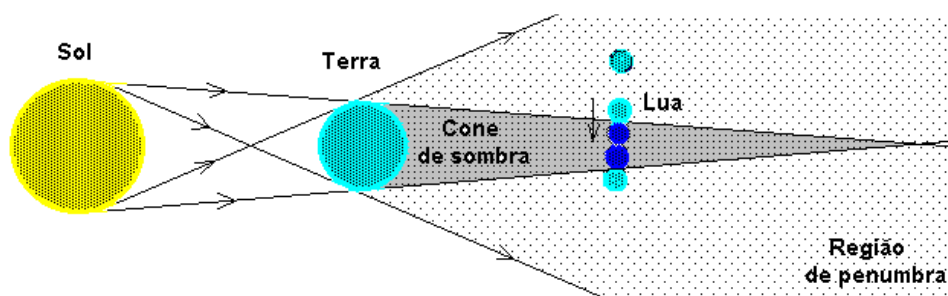
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

Aristarco ($\pm 310 - 230$ a.C.), um ilustre astrônomo da Antiguidade, fez diversos estudos sobre a relação Terra- Lua- Sol, entre eles o cálculo das distâncias do nosso planeta à Lua e ao Sol, bem como estimou o diâmetro desses dois corpos celestes. Ele encontrou um modo muito simples e bastante engenhoso para comparar as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua e os diâmetros da Lua e do Sol, utilizando os mesmos conceitos de semelhança de triângulos que estudamos no Ensino Médio. Aristarco, observou um eclipse lunar e calculou o tempo gasto pela Lua para começar a entrar no cone de sombra até quando ela entrou totalmente, conforme Figura 1.2.

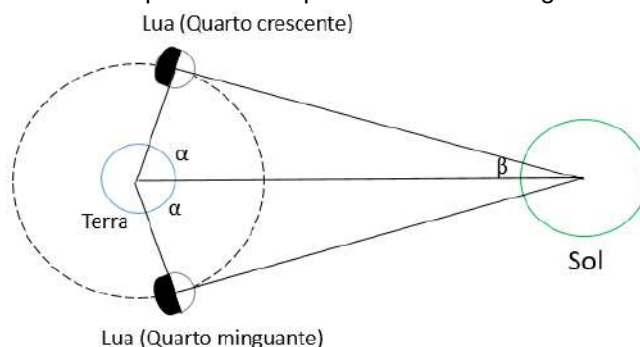
Figura 1.2: Dedução geométrica de início de um eclipse lunar



Fonte: http://www.if.ufrgs.br/~lang/Textos/Dimensoes_cosmologicas.pdf

Ele calculou o tempo de trânsito na região de sombra até o seu início de saída do cone, com o uso da vela para o tempo, e concluiu que o diâmetro do cone tem o dobro do diâmetro da Lua. Após um tempo, Aristarco observando novamente a Lua percebeu que nas fases crescente e minguante do nosso satélite formam um ângulo reto com a Terra e o Sol, conforme descrito na Figura 1.3.

Figura 1.3: Modelo utilizado por Aristarco para descrever o ângulo e distância Terra-Sol



Fonte: Própria do autor

Nesse modelo o ângulo α é muito próximo de 90° , um dos primeiros indícios de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a Lua. Para calcular o valor do ângulo α basta observar o tempo de um ciclo lunar (tempo gasto para a distância angular de 360°), que é de 29,5 dias e o tempo gasto para Lua passar de Minguante a Crescente (percurso angular de 2α), 14,25 dias. Assim, levando-se novamente em conta o critério de proporção, descrita na equação 1.1.

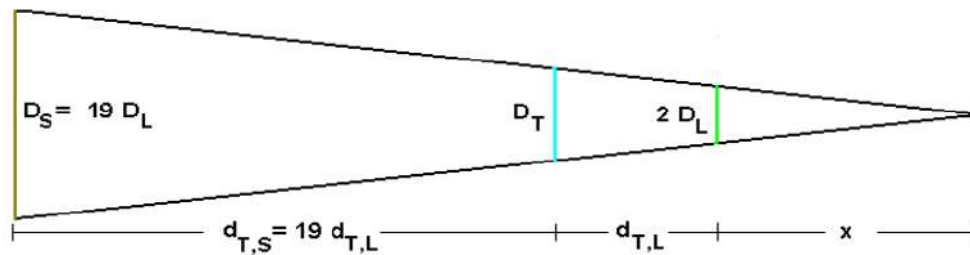
$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25} \therefore \alpha = 86,95^\circ \quad (1.1)$$

Nessa configuração Aristarco utiliza a relação de proporção para calcular o valor do ângulo α , e usando a soma dos ângulos internos de um triângulo, estima em 3° o ângulo β formado pelo Sol como vértice. Interligando esses resultados obtidos, e com os conceitos de semelhança de triângulos descritos na figura 1.3, ele constrói um triângulo retângulo semelhante e conhecendo suas dimensões dos seus lados, estabeleceu uma razão para as distâncias Terra-Sol (TS) e Terra-Lua (TL), em 19 vezes, conforme equação 1.2.

$$\frac{TS}{TL} \cong 19 \quad (1.2)$$

De posse dos resultados obtidos nas duas observações, Aristarco descreveu relações entre os três astros, e mais uma vez utilizando a semelhança de triângulos, estabelece relações entre as distâncias Terra- Sol $d_{T,S}$ Terra -Lua, $d_{T,L}$ e diâmetros da Terra D_T Lua D_L e Sol D_S , descritos na Figura 1.4.

Figura 1.4. Modelo de utilização da semelhança de triângulos para cálculo de distâncias



Fonte: http://www.if.ufrgs.br/~lang/Textos/Dimensoes_cosmologicas.pdf

Um dos resultados obtidos nessa relação entre as distâncias, é descrito nas equações 1.3, 1.4 e 1.5:

$$\frac{19 D_L}{2 D_L} = \frac{20 D_L + x}{x} \rightarrow x = 2,35 d_{T,L} \quad (1.3)$$

$$\frac{3,35 d_{T,L}}{2,35 d_{T,L}} = \frac{D_T}{2 D_L} \rightarrow D_L = 0,35 D_T \quad (1.4)$$

$$D_S = 19 D_L \rightarrow D_S = 6,7 D_T \quad (1.5)$$

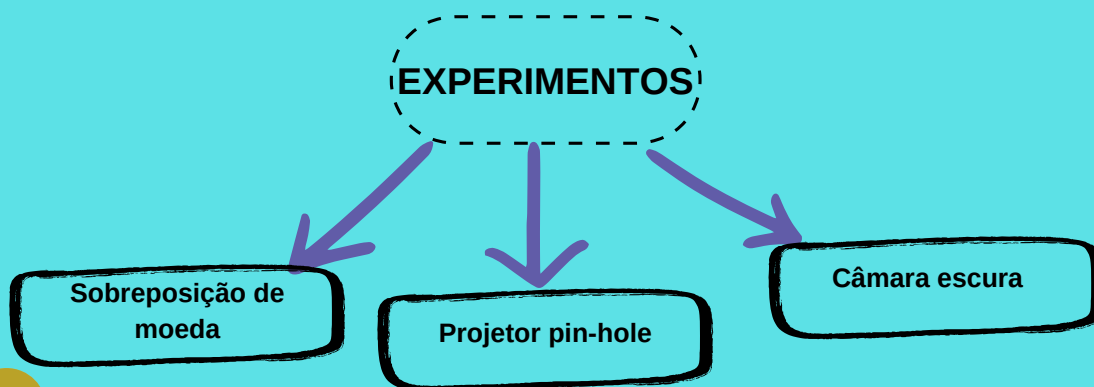
A partir da equação 1.3, Aristarco estabeleceu relações para os distâncias e diâmetros citados anteriormente. Os valores obtidos por ele (Ver tabela 1.1) não estão corretos, mas não podemos deixar de destacar a engenhosidade e a maneira simples que ele utilizou à sua época para chegar aos resultados, ganhando um papel de destaque no desenvolvimento da Astronomia e Matemática.

Tabela 1.1 Valores comparativos aproximados entre os estimados por Aristarco e as medições atuais

VALORES EM REFERÊNCIA COM A TERRA	VALORES DE ARISTARCO	VALORES ATUAIS
DIÂMETRO DA LUA (D_T)	0,35	0,27
DIÂMETRO DO SOL (D_S)	6,7	109000
DISTÂNCIA TERRA- LUA ($d_{T,L}$)	40	30
DISTÂNCIA TERRA- SOL ($d_{T,S}$)	19	380

Fonte: Própria do autor

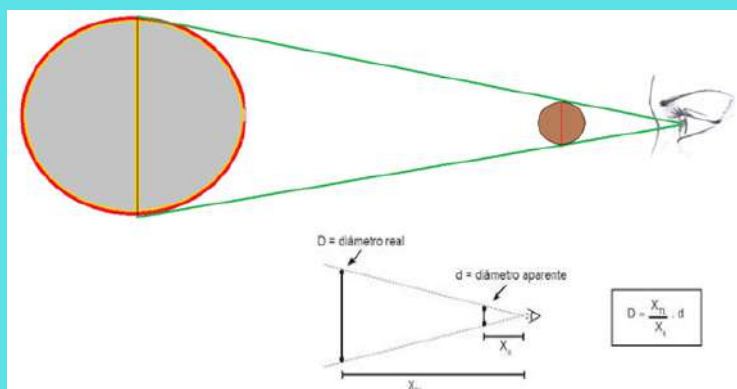
Para relacionar os conceitos citados, propomos três experimentos em que se utiliza da semelhança de triângulos para explicar fenômenos físicos.



Sobreposição de moeda

Esse experimento, baseia-se na disposição de uma moeda ou objeto circular em frente ao olho, de modo que ela sobreponha o objeto mais distante observado. Para isso se utiliza uma trena para medir a distância do olho à moeda e assim estabelecer a relação descrita nas Figuras 1.5 e 1.6.

Figura 1.5: Modelo geométrico de semelhança usando uma moeda



Fonte: Própria do autor

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Figura 1.6: Aplicação do experimento de semelhança usando a moeda



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados

Uma moeda ou objeto circular metálico.

Uma trena com imã na ponta para medição das distâncias.

Caderno para anotações das medidas

Lápis ou caneta.

Projektor pin-hole:

Esse experimento consiste, no furo de alfinete em um pedaço de papelão, com um corte quadrado no centro, e espaço no buraco coberto com papel alumínio. O projetor pin hole é um tipo de câmera fotográfica artesanal que pode operar sem lentes. O termo pin-hole é derivado do inglês e significa “buraco de alfinete”, no qual usamos para estimar a projeção do diâmetro do Sol, conforme as Figuras 1.7 e 1.8.

Figura 1.7: Imagem do projetor pin-hole



Fonte: Própria do autor

Figura 1.8: Aplicação do experimento



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados:

Um pedaço de papelão
(50cm de lado)

Um pedaço de papel
alumínio (15cm de
lado)

Um alfinete

Uma fita métrica ou
régua.

Câmara escura:

Esse experimento propõe mostrar que a luz se propaga em linha reta. Para isso vamos construir uma câmara escura de orifício. Trata-se, basicamente, de uma caixa com faces pretas internas e externas, totalmente fechada, com exceção de um pequeno orifício feito no centro de uma das paredes, por onde penetra a luz. A face oposta à que contem o furo será substituída por papel manteiga, onde será projetada a imagem.

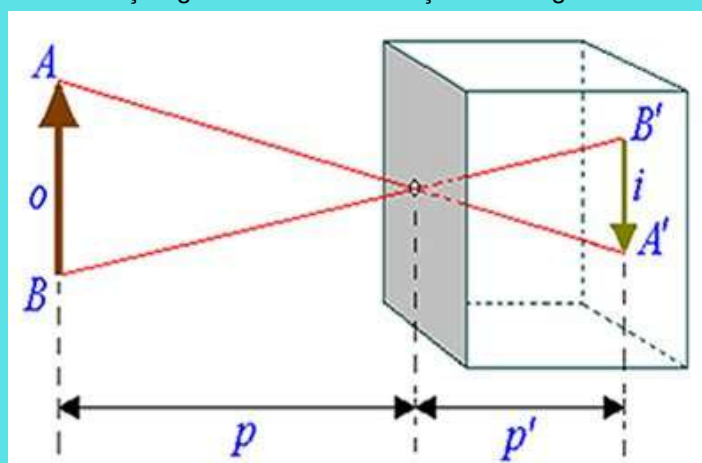
O professor pode aproveitar esse momento para contextualizar sobre a criação das máquinas fotográficas, e mostrar que as imagens vistas por nossos olhos são formadas invertidas no globo ocular, como na câmara escura. Para a matemática, essas imagens formam dois triângulos semelhantes cuja distância objeto-observador, comprimentos da imagem real e da imagem projetada, podem ser calculados usando semelhança de triângulos, conforme ilustra as Figuras 1.9 e 1.10.

Figura 1.9: Modelo de construção de uma câmara escura



Fonte: Própria do autor

Figura 1.10: Descrição geométrica da formação da imagem na câmara escura



Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/camara-escura-orificio.htm>

Materiais Utilizados:

Uma caixa de papelão
ou sapato

Um pedaço de papel
manteiga

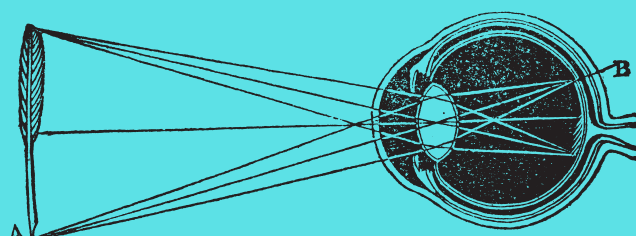
Uma Tesoura ou caneta
para o furo

Tinta spray preta

Fita adesiva para lacrar
os cantos

Fita métrica

Papel e caneta



TEMA 02 – MEDIÇÃO E ESTUDO DOS ÂNGULOS

APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

Um ângulo se caracteriza pela abertura formada no encontro de duas semirretas em um ponto comum, denominado vértice do ângulo. Esse é um objeto de estudo bastante explorado no ensino básico, desde as series iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Médio. Entre outras coisas, abordamos as suas principais unidades de medida (graus e radianos) e vice-versa, até aplicações em medições de alturas, lançamentos de objetos e outras várias situações. Porém, associá-los ao desenvolvimento de outra ciência é raramente discutido em sala de aula, nesse ponto, propomos para esse tópico mediar a necessidade em desenvolver a matemática, para descrever observações dos astros.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

COMPETÊNCIA GERAL DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

HABILIDADE (EF09MA13)

Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

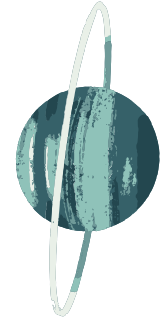
HABILIDADE (EM13MAT404)

Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

Híparco de Nicéia (190aC- 120aC) foi um dos maiores astrônomos de sua época, geógrafo e matemático, considerado o pai da trigonometria. Ele baseou-se no trabalho de pensadores gregos anteriores como:

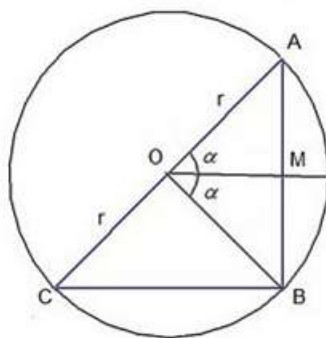
- Aristarco (Medição da distância Terra-Lua)
- Eratóstenes (Medição do raio da terra)
- Arquimedes (Medição de um círculo)



E fontes Babilônicas e Egípcias, que ele examinou na sua própria metodologia para confirmar suas precisões. Seu trabalho ficou conhecido a partir do livro O Almagesto de Claudio Ptolomeu.

Híparco desenvolveu a trigonometria com a construção de tabelas de ângulos baseadas no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda, a medida que se escolhe um corda qualquer, tem-se associada a ela uma raio, assim Híparco estabeleceu diferentes relações entre a corda e o seu respectivo raio, criando tabelas que serviram de base para a criação posterior das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, conforme Figura 2.1.

Figura 2.1: Representação geométrica para o cálculo dos primeiros ângulos.



Fonte: Obtida do Geogebra pelo autor

Essa relação gerou o que hoje é conhecido como seno de um ângulo, a partir da equação 2.1:

$$\text{sen} \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{corda de } 2\alpha}{2r} \rightarrow \text{corda de } 2\alpha = 2r \text{ sen} \alpha \quad (2.1)$$

O desenvolvimento da trigonometria por Híparco tinha o propósito de tentar explicar as observações astronômicas feitas por ele. Destas, as que mais se destacam são: **a inclinação do eixo da eclíptica, a escala de magnitude das estrelas**, junto ao catalogo da posição de mais de 800 estrelas, e o **movimento de precessão** do nosso planeta.

Inclinação da eclíptica, é o ângulo que o eixo de rotação da Terra faz com uma direção normal (perpendicular) ao plano da órbita da Terra em torno do Sol (o plano da eclíptica). Híparco utilizou a posição do Sol no início das estações e assim utilizando a trigonometria conseguiu definir em 23,5°, o valor para essa inclinação, como descrito na Figura 2.2.

Figura 2.2: Modelo de elevação do Sol ao meio dia em cada estação do ano

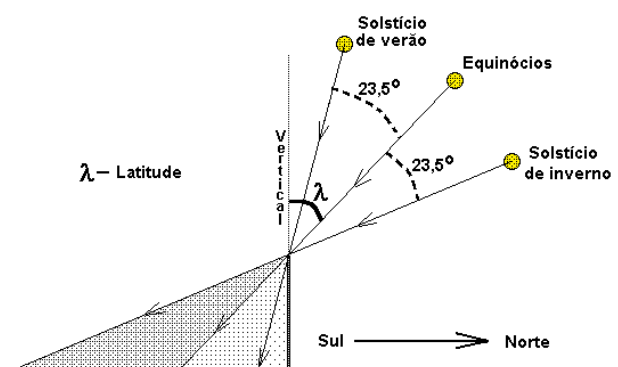
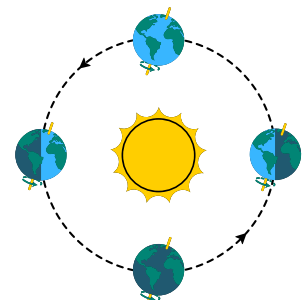
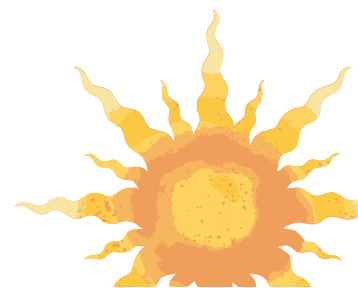
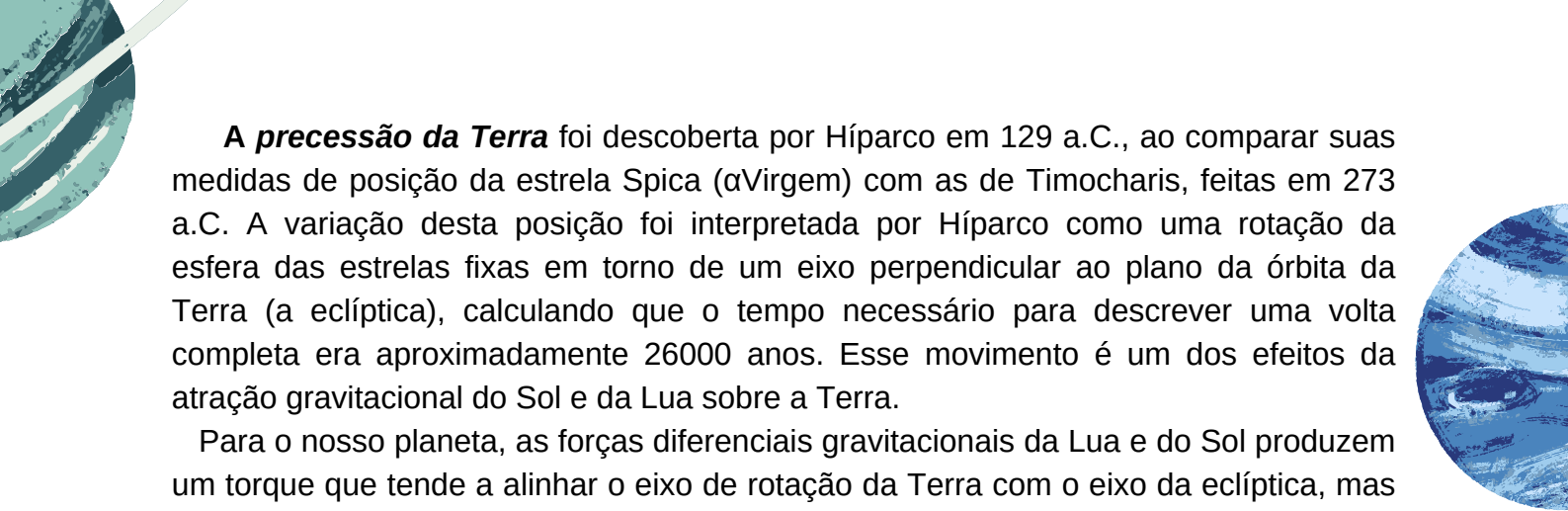


Figura 1 - Elevação do Sol ao meio-dia depende da latitude e varia ao longo do ano.





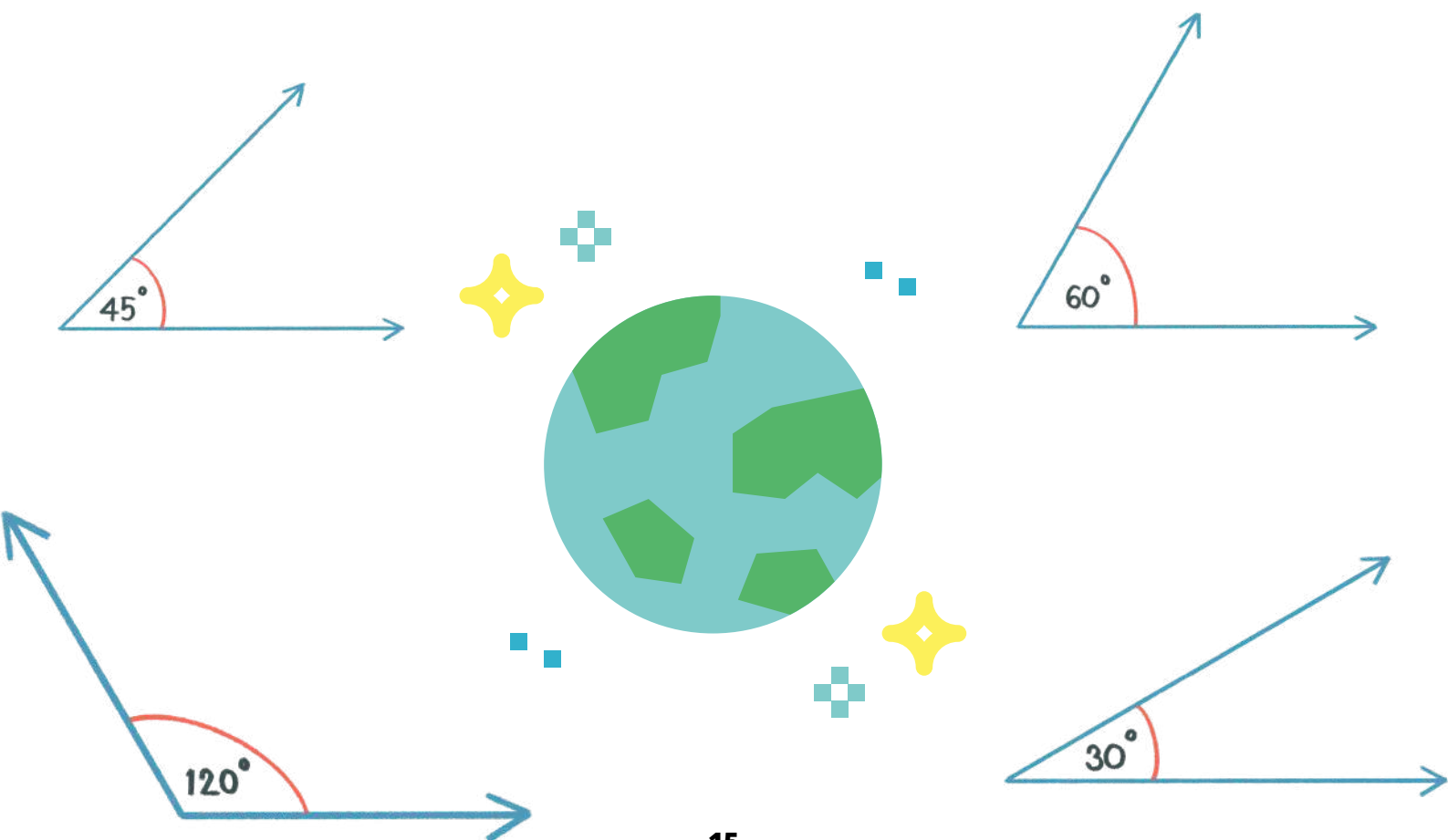
A **precessão da Terra** foi descoberta por Híparco em 129 a.C., ao comparar suas medidas de posição da estrela Spica (α Virgem) com as de Timocharis, feitas em 273 a.C. A variação desta posição foi interpretada por Híparco como uma rotação da esfera das estrelas fixas em torno de um eixo perpendicular ao plano da órbita da Terra (a eclíptica), calculando que o tempo necessário para descrever uma volta completa era aproximadamente 26000 anos. Esse movimento é um dos efeitos da atração gravitacional do Sol e da Lua sobre a Terra.

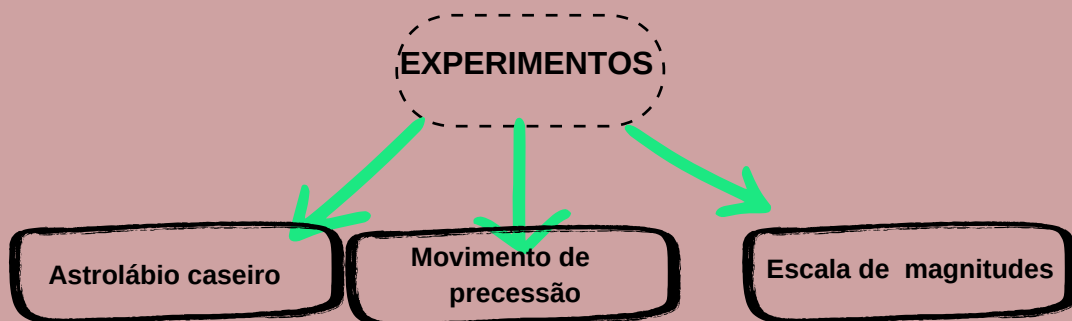
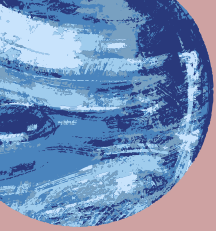
Para o nosso planeta, as forças diferenciais gravitacionais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao momentum angular de rotação da Terra, seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação. Como efeito desse movimento, os polos celestes não ocupam uma posição fixa no céu: cada polo celeste se move lentamente em torno do respectivo polo da eclíptica, descrevendo uma circunferência.



A consequência visível desse movimento é a mudança da posição da estrela de referência no polo. Atualmente o Polo Celeste Norte está nas proximidades da estrela Polar, na constelação da Ursa Menor, mas isso não será sempre assim. Daqui a cerca de 13000 anos o polo celeste norte estará nas proximidades da estrela Vega, na constelação de Lira.

Outra descoberta de Híparco foi a **escala de magnitudes**. Ele percebeu que com o pôr do Sol as estrelas aparecem aos poucos e as primeiras a aparecer vão aumentando o brilho, e outras vão aparecendo à medida que vai ficando mais escuro. Ele classificou como escalas de magnitudes, ou seja, uma escala que aferia a olho nu o brilho das estrelas. Essa escala tinha os valores de 1 a 6, sendo as primeiras e mais brilhantes de magnitude 1, e diminuindo o brilho até as mais fracas de brilho na escala 6.





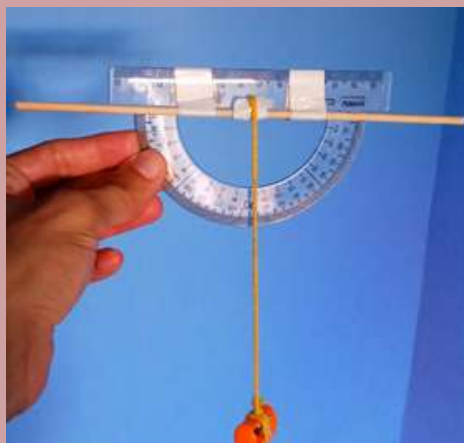
Para ajudá-lo a compreender e explicar melhor as observações realizadas, Híparco desenvolveu além de tabelas trigonométricas, um instrumento capaz de calcular a posição dos astros a partir de princípios geométricos. Chamado de astrolábio, ele deriva das palavras gregas “astron”, que significa estrela e “lambanein”, que significa pegar. Dessa maneira descreveremos três experimentos que reproduzem as descobertas de Híparco e que ajudam a motivar sobre a importância da geometria no desenvolvimento da Astronomia.

Astrolábio caseiro



Esse experimento consiste na construção do astrolábio ou teodolito, utilizando materiais simples, como palito de churrasco/canudo, e transferidor (ver Figura 2.3). O experimento com o astrolábio pode ser feito para mostrar como ele catalogou as estrelas, e determinou a inclinação da eclíptica. No primeiro, se utiliza o astrolábio para medir a altura em graus de vários astros. Caso a turma seja do turno noturno o professor pode aproveitar e tentar identificar algumas constelações e estrelas visíveis, utilizando mapas celestes ou aplicativos.

Figura 2.3: Imagem do astrolábio caseiro



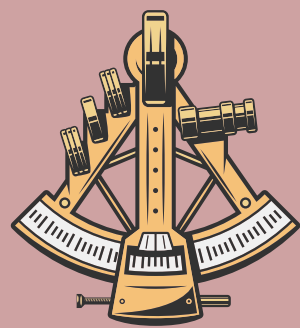
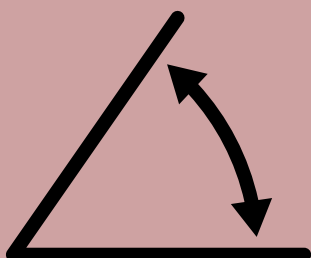
Fonte: Própria do autor

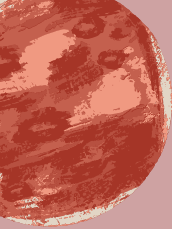
No caso de aulas no diurno, usa-se o astrolábio para medir a altura angular de objetos na própria escola, como árvores, postes de energia e prédios. O professor pode aproveitar as informações coletadas no experimento e utilizar as relações trigonométricas para calcular a altura ou a distância do observador até o objeto avistado, contextualizando esse conceito, conforme Figura 2.4.

Figura 2.4: Utilizando o experimento



Fonte: Própria do autor





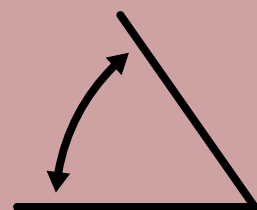
O segundo consiste em reproduzir o cálculo da inclinação da eclíptica, usando o astrolábio e o software de astronomia chamado Stellarium para projetarmos no quadro da sala de aula a posição do Sol ao meio dia, nas datas de início das estações do ano, e marcamos a altura relativa em cada uma delas.

Durante a execução da atividade, vamos perceber que as posições de março e setembro tem a mesma altura, abrindo caminho para a interdisciplinaridade desse conceito usado para explicar sobre os equinócios e solstícios. Depois da marcação, usando o astrolábio, verifica-se que entre os pontos marcados existe uma diferença de aproximadamente $23,5^\circ$, justamente a determinada por Híparco, conforme Figura 2.5.

Figura 2.5: Reprodução da altura do Sol em cada estação, utilizando o Stellarium.



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor



Materiais Utilizados:

Um transferidor de meia volta e um pedaço de barbante

Uma borracha, apontador de lápis, outro objeto para contrapeso

Computador com internet, ou com o software Stellarium instalado

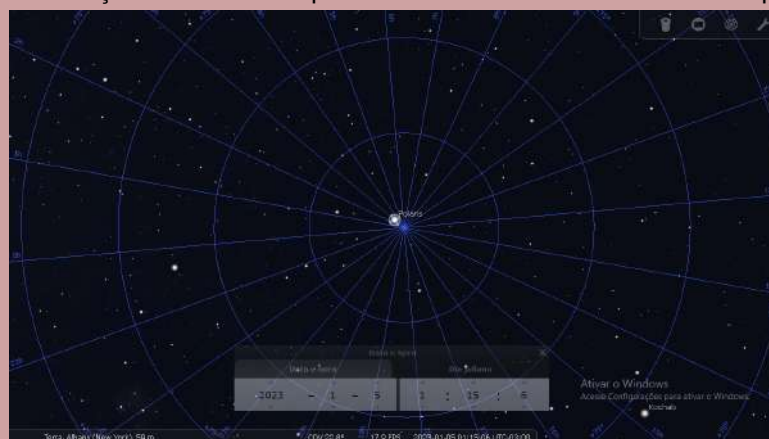
Tesoura e Fita adesiva, palito de churrasco ou canudo

O método para construção do astrolábio caseiro, e os procedimentos usados no Stellarium constam no apêndice 01.

Movimento de precessão

Esse experimento tenta reproduzir a mudança de posição da estrela de referência do polo celeste norte. Para isso usaremos o software Stellarium para mostrar que a estrela que mais se aproxima do polo norte é a polaris, conforme Figura 2.6.

Figura 2.6: Utilização do Stellarium para definir a estrela de referência do polo celeste norte



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

Adiantamos a cada 2000 anos e observamos nas figuras 2.6 e 2.7, que a estrela Polaris deixa de ser a referência do polo celeste norte, apenas retornando quando completa o ciclo da precessão previsto por Híparco.

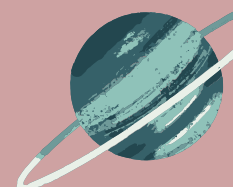
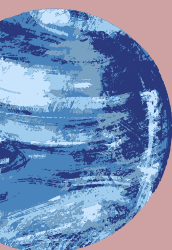
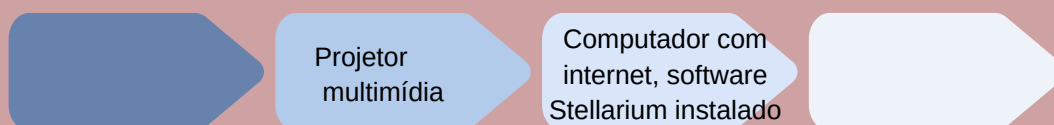


Figura 2.7: Utilização do Stellarium para mostrar que a estrela de referência do polo celeste norte muda de posição pelo movimento de precessão da Terra



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

Materiais Utilizados:

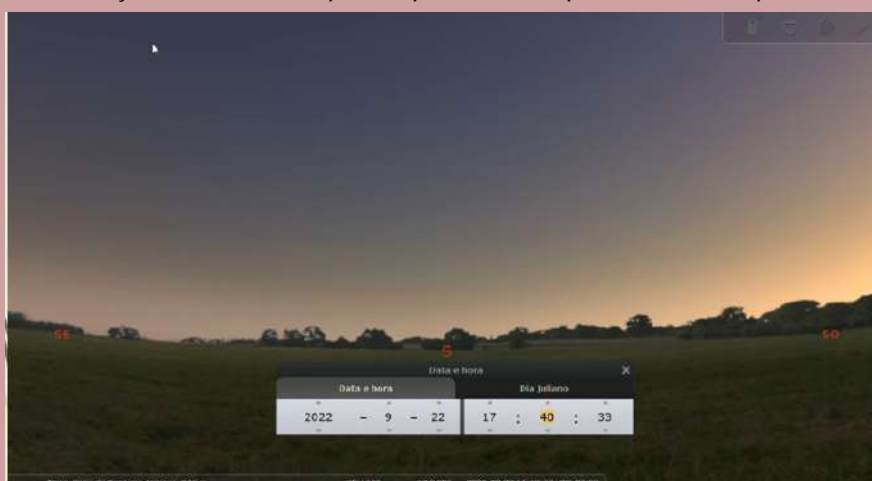


Os procedimentos usados no Stellarium constam no apêndice 02.

Escala de magnitudes

Esse experimento pode ser feito utilizando as mesmas ferramentas que Híparco utilizou, ou seja, o olho nu. Para isso é necessário realizar uma observação do céu no pôr do Sol como linha referencial do horizonte. Os alunos observam quais estrelas eles visualizam primeiro e com auxílio de mapas ou softwares podem comparar depois com a escala. Caso não seja possível essa observação direta, devido à poluição luminosa das cidades, podemos utilizar o software Stellarium para reproduzir esse momento, como descrito na Figura 2.8.

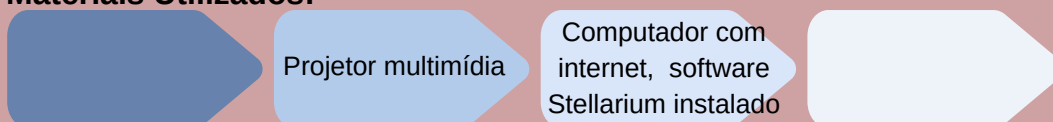
Figura 2.8: Utilização do Stellarium para reproduzir o experimento de Híparco sobre magnitudes



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

Utilizando algumas ferramentas desse software podemos avançar o tempo de modo a diminuir a incidência da luz solar e descrever o surgimento das estrelas no céu, e comparando a sua luminosidade nesse período.

Materiais Utilizados:



TEMA 03 – ESTUDO DO LOGARITMO

APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

O conceito de logaritmo foi introduzido pelo matemático John Napier, como forma de simplificar cálculos matemáticos provenientes do desenvolvimento da Astronomia, do comércio oriundo da expansão marítima e de outras ciências. O método usado consistia em transformar multiplicações e divisões de números com alto valor em somas e subtrações, para isso ele criou uma escala logarítmica com base nas progressões geométricas (P.G), que estudamos hoje, conforme Figura 3.1.

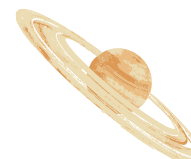
Figura 3.1: Tabela utilizada para a definição do logaritmo com operações entre as potências

$Y = \log_6 X$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

Diagram illustrating the relationship between powers of 6 and their logarithms:

- $8 + 10 = 18$ (Logarithmic addition)
- $256 \times 1024 = 262144$ (Arithmetic multiplication)



Fonte: Própria do autor

Hoje com a popularização das calculadoras eletrônicas essas tabelas caíram em desuso, porém associá-las ao desenvolvimento da matemática, e principalmente a outras ciências, melhora a forma como os alunos veem esse conteúdo no Ensino Básico.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 03

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADE (EM13MAT305)

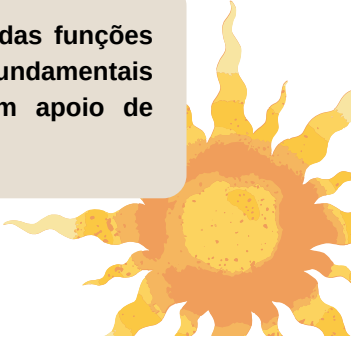
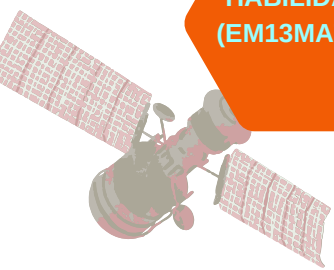
Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 04

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

HABILIDADE (EM13MAT403)

Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.



CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

Com a utilização do astrolábio, Híparco catalogou mais de 800 estrelas criando uma escala de magnitude (A intensidade do brilho de uma estrela), tomando como referência o pôr do Sol, e classificou as primeiras estrelas que apareceram como magnitude 1. As demais, em sequência como magnitude 2 até a magnitude 6 para as estrelas de menor brilho, como vimos na seção anterior sobre ângulos. Com o advento da luneta de Galileu, a escala de Híparco ganhou mais um número chegando à magnitude 7. Porém, com o melhoramento dos telescópios os astrônomos se depararam com a falta de objetividade na determinação da magnitude de cada estrela. Não havia um critério ou escala uniforme e a mesma estrela poderia ser indicada com magnitude diferente consoante o astrônomo que a classificava.

Um astrônomo chamado William Dawes, afirmou que:

"As magnitudes das estrelas telescópicas são indicadas por valores tão diversos por diferentes observadores, tornando impossível antecipar a aparência de um dado objeto num telescópio de um dado tipo e dimensões, sem fazer referência à escala de magnitudes adotada pelo observador que indicou essa magnitude para a estrela em questão."

O próprio Dawes, estabeleceu uma relação utilizando uma razão (R) inversa dos quadrados das aberturas limites de detecção de uma estrela, conforme equações 3.1 e 3.2.

$$\frac{\text{Brilho da estrela 2}}{\text{Brilho da estrela 1}} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad (3.1)$$

$$(m_2 - m_1) = \frac{D_1^2}{D_2^2} \Rightarrow (2 - 1) \cdot R = \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad (3.2)$$

Diante desse contexto Robert Pogson então, utilizando a relação de Dawes, percebe que poderia aplicar o logaritmo e essa razão, obtendo a equação 3.3.

$$\log R = \log \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad (3.3)$$

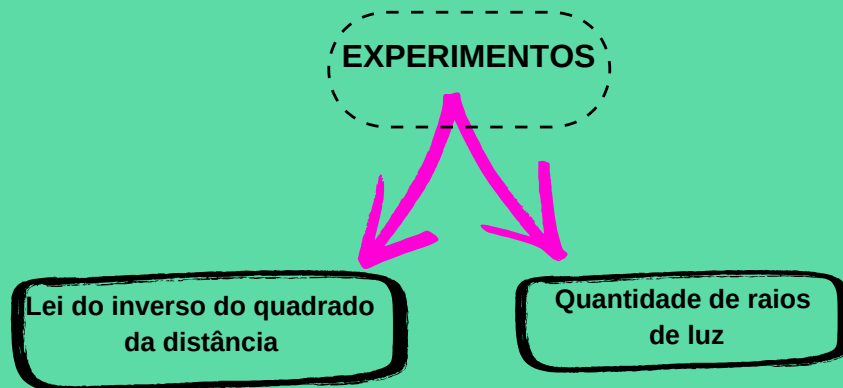
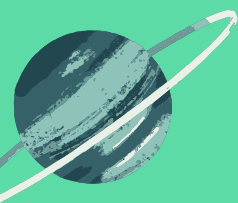
E sabendo que a diferença entre os brilhos de duas estrelas de magnitude 1 e 6 é de 100 vezes, utilizando as medições de John Herschel, ele consegue calcular o logaritmo da equação 3.2, chegando a equação 3.4 e 3.5

$$(m_6 - m_1) \cdot \log R = \log \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad (3.4)$$

$$5 \cdot \log R = \log 100 \quad (3.5)$$

Resolvendo os logaritmos chega-se no valor esperado $R = \sqrt[5]{100} = 2,511..$

Pogson utilizou Φ , para fluxo luminoso recebido pela lente por unidade de área, e assim definiu em 2,512 vezes a diferença entre as magnitudes. E também aproveitando a escala de Híparco, definiu-se que a estrela Vega seria classificada na magnitude 0 e as estrelas mais brilhantes terão magnitudes negativas, chegando hoje até -1,5 para Sírio e -26,7 para o Sol.



Existem várias formas de contextualizar o conceito de logaritmo, desde a matemática financeira, a crescimentos de populações e reações químicas. Mas em nenhuma delas o estudante pode observar sem um laboratório ou contexto específico. O que propomos nessa temática é mostrar ao aluno a importância do logaritmo através da simples observação de estrelas ou planetas ao olhar para o céu.

Lei do inverso do quadrado da distância

Esse experimento consiste em projetar uma página cheia de bolinhas no quadro ou parede branca. Usando uma folha de papel ofício faça variar a distância do papel à fonte luminosa do projetor. Quanto mais próximas, mais bolinhas caberão no papel e à medida que nos afastamos da fonte luminosa menos bolinhas caberão no papel. Essa relação pode ser tabulada e calculada por um logaritmo, conforme Figura 3.2.

Figura 3.2: Reprodução do experimento da lei do quadrado da distância



Fonte: Própria o autor

Materiais Utilizados:

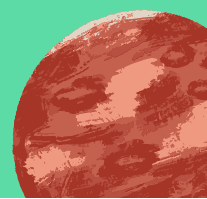
Projetor
multimídia e
computador

Fita métrica

Papel ofício

Lápis para anotar
os resultados

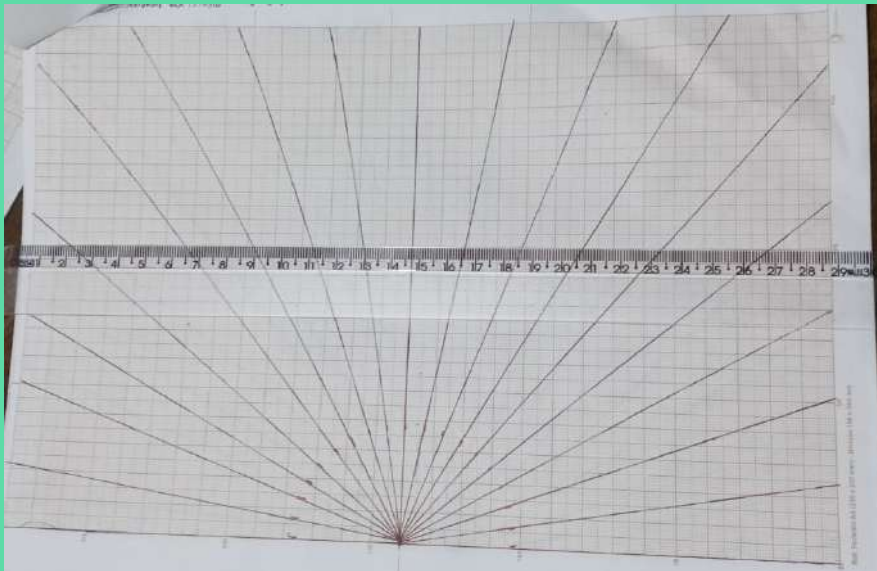
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



Quantidade de raios de luz

O experimento tenta reproduzir a emissão de luz de uma estrela e determinar a quantidade de luz que um observador recebe quando está mais próximo ou distante dela. Consiste em marcar um ponto no centro de um dos lados do papel milimetrado, e utilizando um transferidor de meia volta traçar linhas de 5° ou 10° graus, até completar os 180°. Após a tarefa, o estudante vai usar uma régua paralela ao lado em que o ponto foi marcado, e variar a distância do ponto até a régua, começando com uma distância maior até a menor e anotando quantos linhas provenientes do ponto tocam na reta, conforme Figura 3.3

Figura 3.3: Construção do modelo no papel milimetrado



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados:

Papel
milimetrado

Transferidor

Régua e lápis

Computador
com excel

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$



$$y = \log_b x$$

TEMA 04 – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

As relações trigonométricas estão ligadas diretamente ao desenvolvimento da Astronomia. Híparco foi o primeiro a estabelecer relações entre as cordas e o diâmetro de uma circunferência, descrevendo ângulos entre esses valores em tabelas de frações sexagesimais, sistema de numeração Grego na época. Embora não se descrevia o seno nessas tabelas, era fácil de calcular conhecendo os ângulos. O Cosseno surge como complemento do ângulo seno, justamente na época de discussão dos modelos Geocêntrico e Heliocêntrico. A definição é que as relações trigonométricas, são as possíveis divisões entre as medidas dos dois lados de um triângulo retângulo, sendo o maior desses lados a hipotenusa e os outros catetos, conhecidas como, seno, cosseno e tangente.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

COMPETÊNCIA GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

HABILIDADE (EM13MAT103)

Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 03

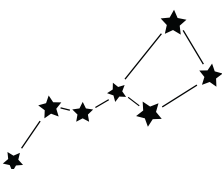
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADE (EM13MAT301)

Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.

HABILIDADE (EM13MAT306)

Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.



CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

A teoria do geocentrismo foi aceita por mais de um século sendo argumentada por grandes estudiosos desde Aristóteles que dizia que a Terra era estática e posicionada no centro do universo. Eudoxo foi o primeiro a introduzir a matemática para explicar os movimentos dos planetas e tentar explicar o movimento retrógrado conhecida como laçada de Marte. Ptolomeu, usando os conhecimentos anteriores publicou sua teoria no livro “O almagesto” em que descreve os movimentos dos planetas usando círculos chamados de deferentes ao redor da Terra central e epiciclos a esses círculos para explicar o movimento retrógrado.

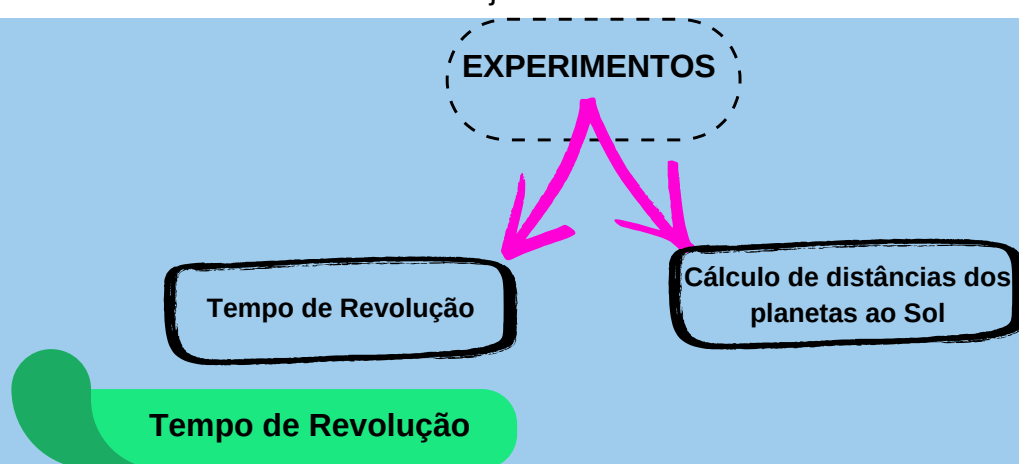
Essa teoria gerava sempre conflitos, pois à medida em que as observações ficavam mais precisas o modelo precisava ser atualizado, tendo que se deslocar a Terra do centro para um ponto próximo chamado equante. Essas mudanças no modelo o deixavam cada vez mais complexo.

Nesse período entrou em cena o astrônomo, matemático, médico e religioso polonês Nicolau Copérnico. Ele desenvolveu a teoria heliocêntrica, onde o centro do Sistema Solar era o Sol, e descreve os movimentos de rotação para explicar o movimento aparente do Sol no céu, e o de revolução (translação).

Esse último, diferente do modelo de Ptolomeu (em que os epiciclos realizavam a revolução), o epiciclo era usado apenas para a Lua e, mais tarde, com a luneta de Galileu para os satélites dos outros planetas.

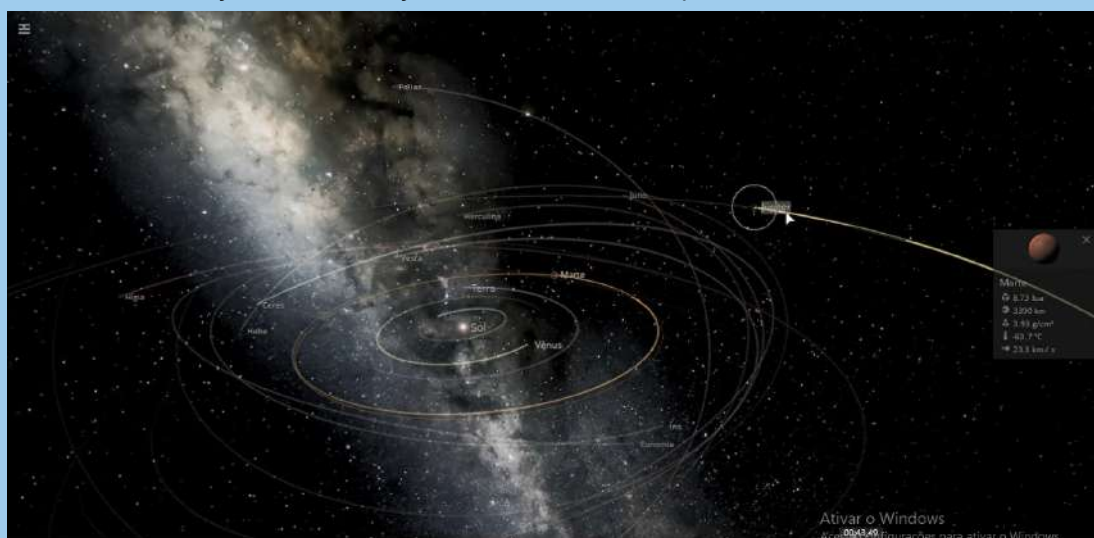
Para nossa temática, vamos explorar dois conceitos desenvolvidos por Copérnico e que envolvem conceitos matemáticos do ensino básico, sendo eles, operações com frações para cálculo dos períodos sinódico e sideral, e as relações trigonométricas para o cálculo de distância entre os planetas interiores (Mercúrio, Vênus e Terra) e os exteriores (Marte, Júpiter, Saturno) até o Sol.

Na busca de contextualizar esse conceito com a matemática do Ensino Médio, além das descrições históricas que citamos, propomos dois experimentos usando software de Astronomia e as reações matemáticas desenvolvidas por Copérnico para provar sua teoria como a conhecemos hoje.



Quando falamos em unidades de tempo, lembramos de segundos, minutos, horas, dias, anos, décadas, séculos. Porém essas unidades não são de tempo e sim de movimento. Movimento esse que a Terra realiza em torno do Sol. Copérnico percebeu que cada planeta tem seu tempo de revolução, os mais próximos mais rápidos e os mais afastados mais lentos. Para visualizar essa ideia usaremos o Jogo Universe SandBox, um software de simulações em Astronomia que mostra na sua exposição inicial, o nosso sistema solar em velocidades e distâncias em escalas, conforme Figura 4.1.

Figura 4.1: Demonstração das diferenças de velocidades dos planetas utilizando o Universe SandBox

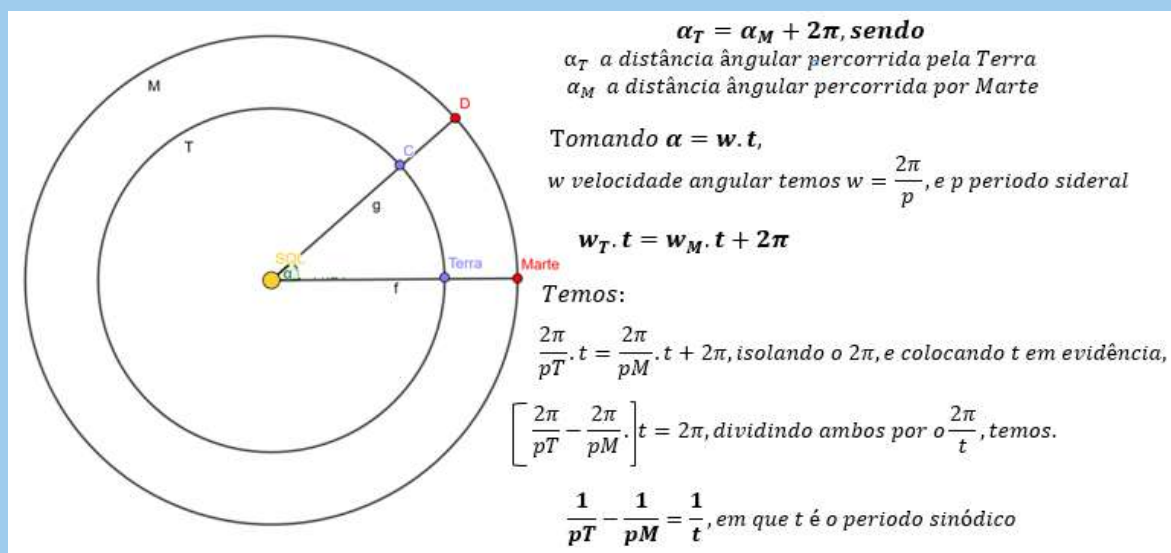


Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Ao clicar em cada planeta a começar por Mercúrio, depois Vênus, Terra e assim sucessivamente até Netuno, o jogo faz a tela movimentar acompanhando cada planeta que foi escolhido. Isso permite ao expectador notar as diferenças de velocidade de cada um e visualizar o que Copérnico percebeu.

Para calcular o período sinódico (intervalo de tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivas, também o período de revolução aparente do planeta, em relação à Terra), e o período sideral (o período real de revolução (translação) do planeta em torno do Sol, em relação a uma estrela fixa) usaremos os conceitos velocidade angular, descrito na Figura 4.2.

Figura 4.2: Descrição do cálculo de período sinódico e sideral usando Marte e a Terra



Fonte: Obtido do Geogebra pelo autor

Materiais utilizados:

Projeto
multimídia e
computador

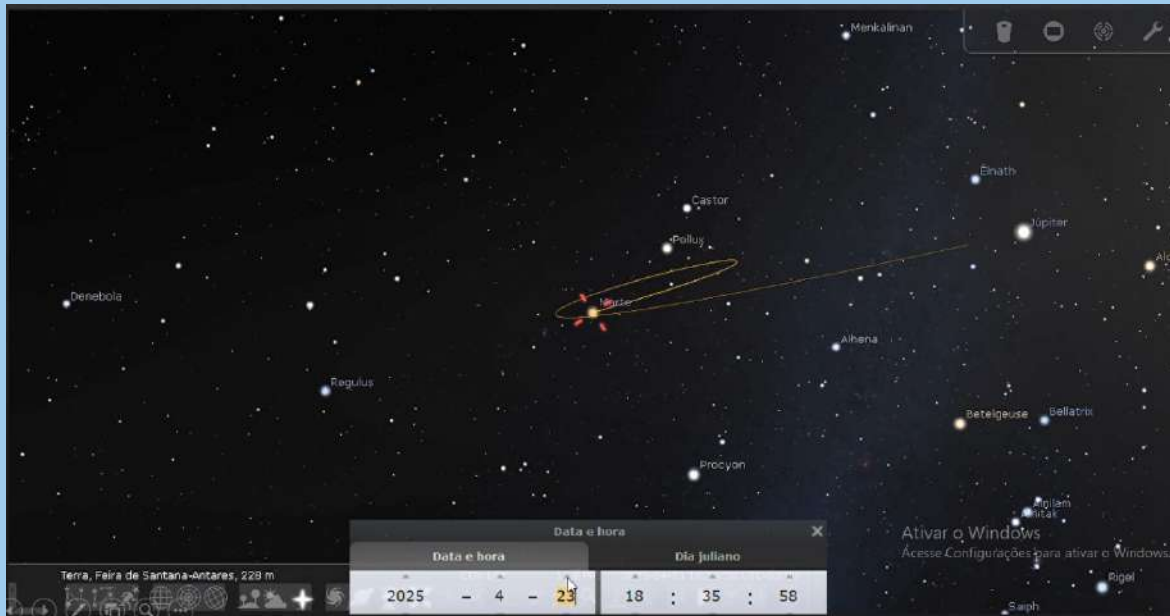
Software
Stellarium no
computador

Software
Geogebra no
computador

Cálculo de distâncias dos planetas ao Sol

Nesse experimento usaremos o software Stellarium para mostrar o movimento retrógrado de Marte, e com base nele justificar como Copérnico descreveu os cálculos para as distâncias dos planetas ao Sol, conforme Figura 4.3.

Figura 4.3: Reprodução do movimento retrógrado de Marte usando o Stellarium

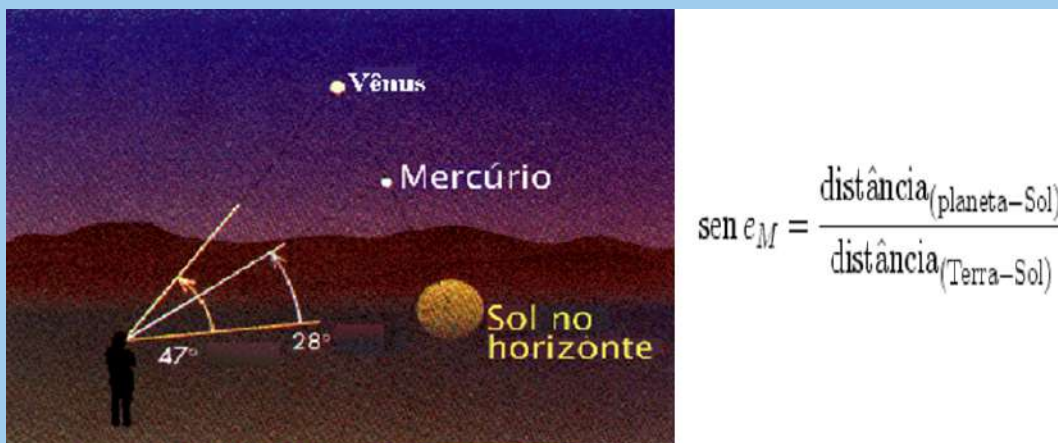


Fonte: Obtido do Stellarium pelo autor

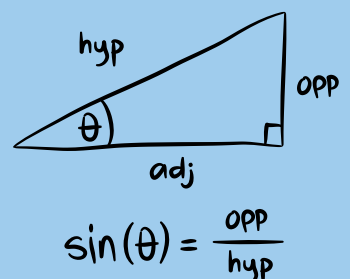
Por meio de observações e cálculos matemáticos, Copérnico determinou os períodos siderais dos planetas a partir de seus períodos sinódicos como vimos no experimento anterior. Ele conseguiu calcular as distâncias dentro do sistema solar em termos da distância Terra-Sol, ou seja, em unidades astronômicas (UA).

Para Planetas inferiores ele utilizou o seno do ângulo, no momento de uma quadratura como descrito na Figura 4.4.

Figura 4.4: Representação artística de Mercúrio e Vênus vistos ao pôr do Sol, com elongações de 28° e 47°, respectivamente.

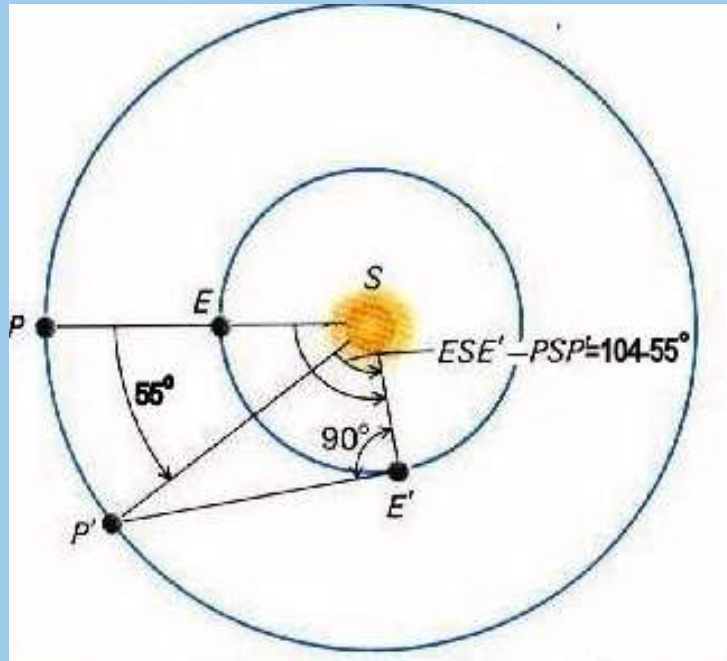


Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/p1/node4.htm>



Para os planetas exteriores, Copérnico viu que o intervalo de tempo decorrido entre uma oposição e uma quadratura entre a Terra e Marte é de 106 dias. Nesse período, a Terra percorre uma distância angular de $ESE'=104^\circ$ (pois em 365 dias ela percorre 360° , em 106 dias ela percorre $106/365 \times 360^\circ$). Como o período sideral de Marte é de 687 dias, então a distância angular percorrida por Marte nesse mesmo período de 106 dias será: $PSP'=55^\circ$ (pois em 687 dias ele percorre $106/687 \times 360^\circ$), conforme descrita na Figura 4.5

Figura 4.5: Ilustração da medida da distância dos planetas superiores



Fonte: <http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula5-132.pdf>

Considerando o triângulo formado pelo Sol (S), Terra (E') e Marte (P') na quadratura, conforme mostra a Figura 4.5, o ângulo entre o Sol e o planeta, visto da Terra, é 90 graus, e o ângulo entre Terra e Marte, visto do Sol, é $ESE' - PSP' = 104^\circ - 55^\circ = 49^\circ$. O triângulo formado com ângulo reto na Terra descreve o cosseno como relação trigonométrica, visto que sua hipotenusa nesse triângulo é a distância entre Sol e Marte, e o cateto adjacente à distância do Sol à Terra.

Então a distância (d) entre Marte e Sol é expressa na equação 4.1 :

$$d(\text{Sol} - \text{Marte}) = \frac{1 \text{ U.A.}}{\cos 49^\circ} = 1,52 \text{ U.A.} \quad (4.1)$$

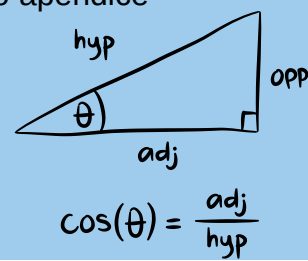
Materiais utilizados:

Projeto
multimídia e
computador

Software
Stellarium no
computador

Software
Universe SandBox no
computador

Os procedimentos usados no Stellarium, e no Universe SandBox constam no apêndice 04.



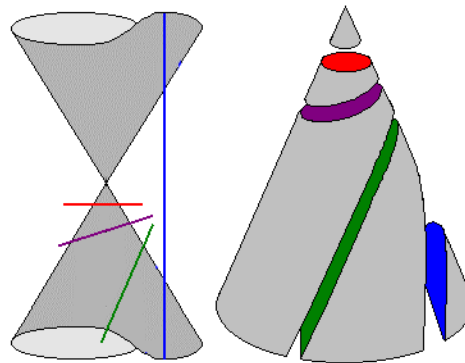
TEMA 05 – SECÇÕES CÔNICAS

APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

As secções cônicas – hipérbole, parábola, elipse e a circunferência, possuem todas elas, um aspecto singular, são curvas obtidas pela intersecção de um plano com um cone, conforme o ângulo que esse plano secciona o cone.

Um cone pode ser formado por duas retas concorrentes r e s , de modo que não sejam perpendiculares, e sua intersecção ocorra em um ponto. Rotacionando elas ao redor desse ponto obtêm um cone circular. Toda reta obtida pela rotação de r é chamada de geratriz do cone e a reta s é denominado reta vertical ou altura desse cone. Para obter uma parábola, o ângulo do plano tem que ser paralelo a geratriz do cone. Já para a hipérbole, o ângulo é paralelo a reta vertical (altura) do cone. A elipse surge quando o ângulo varia entre as limitações para a parábola e a hipérbole, e nos casos especiais o ângulo de secção é perpendicular à reta vertical, temos a circunferência, conforme Figura 5.1.

Figura 5.1: Ilustração das secções cônicas em um cone reto



Fonte: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo6/cont_conicas.html

Outra forma de determinar qual cônica se observa é a representação gráfica, sendo a parábola e hipérbole curvas abertas, e elipse e circunferências curvas fechadas. Para esses casos a excentricidade classifica qual a curva está se trabalhando descritas na equação geral das cônicas, conforme equação 5.1 e Figura 5.2.

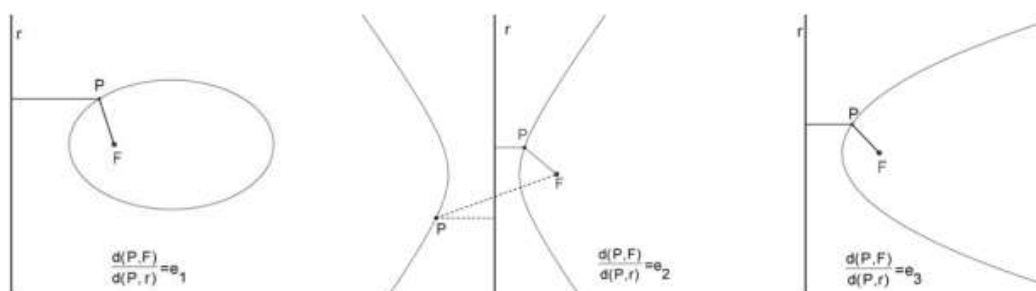
$$d(p, f) = e \cdot d(p, s) \quad (5.1)$$

Onde: $d(p, f)$ é a distância do ponto da curva ao foco.

$d(p, s)$ é a distância do ponto da curva até a reta diretriz (s).

e é a excentricidade da curva.

Figura 5.2: Representação geométrica das cônicas e sua relação com a excentricidade



Fonte: <http://www.unoeste.br/site/enepe/2012/suplementos/area/Exactarum.pdf>

Satisfazendo as condições descritas temos: elipse $0 \leq e < 1$, parábola $e = 1$, hipérbole $e > 1$. A circunferência como caso especial de elipse, tem $e = 0$.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 05

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADE (EM13MAT509)

Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

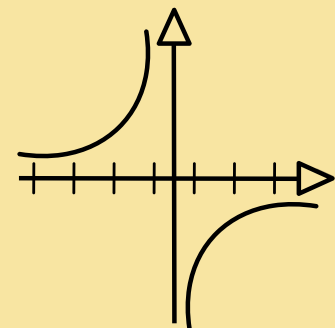
As secções cônicas estão presentes em inúmeras invenções e ocorrem em praticamente todas as áreas do conhecimento como na Engenharia, Matemática, Física, Química, Biologia, Arquitetura, Astronomia, Artes. No nosso caso vamos aproveitar o contexto das cônicas na Astronomia como uma maneira do aluno entender a explicação de fenômenos, e como se determina os conceitos que sempre saem na mídia sobre a Astronomia.

Nesses casos podemos relacionar cada cônica com fenômenos astronômicos. Um exemplo que desperta a atenção é a relação dos cometas: No mês de fevereiro de 2023, foi possível ver a olho nu o cometa C/2022 E3 (ZTF), cuja última passagem próxima da Terra foi há 50 mil anos. **Como explicar aos estudantes essa diferença de tempo entre as passagens dos cometas, e porque uns passam apenas uma única vez?**

Um cometa pode ter dois tipos de trajetórias, fechadas ou abertas sempre com o Sol em um dos focos. No caso da trajetória fechada os cometas são denominados de periódico e tem órbitas elípticas ao redor do Sol, e sua periodicidade depende diretamente da sua excentricidade, ou seja, quanto mais excêntrico, mais demorado o seu retorno. A título de exemplo o cometa Halley tem período de 76 anos. Esses cometas são oriundos em sua maioria do Cinturão de Kuiper, que fica além da órbita de Netuno.

Outros tipos de cometas são classificados como não periódicos, ou seja, tem sua trajetória aberta, e suas órbitas podem ser hiperbólicas ou parabólicas, dependendo na inclinação com o nosso sistema solar. Esses cometas tem a característica comum de não pertencerem ao nosso sistema solar, ou seja, são cometas interestelares. Como exemplos temos a passagem dos cometas Oumumua (2017) e Borisov (2019).

Para a contextualização do conceito das cônicas propomos, duas atividades, a primeira é a secção do plano em um cone para determinar o tipo de curva, e a segunda usar o software Geogebra para mostrar a diferença entre os cometas periódicos e não periódicos, e mostrar uma animação feita no Universe SandBox com a passagem do cometa Oumumua.



EXPERIMENTOS

Secção do plano
no cone

Uso de software para
identificar as curvas

Secção do plano no cone

Esse experimento consiste em utilizar um cone de marcação ou musculação que é vendido em mercados ou pela internet. Serão necessários quatro cones, um para cada curva. Primeiro fazemos um furo no centro de cada cone e colocamos um palito de churrasco simulando a reta vertical. Após o encaixe do palito cortamos cada cone com o ângulo estabelecido na subseção de apresentação temática e encaixamos uma folha de papel ofício A4 para simular o plano que secciona o cone, conforme Figura 5.3.

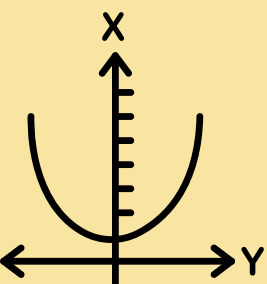
Figura 5.3: Imagem dos cones seccionados por uma folha de papel



Fonte: Própria do autor

O experimento consiste em o aluno contornar a intersecção entre o cone e o papel e depois retirá-lo do cone, e identificar a qual curva a representação corresponde, reforçando o conceito teórico com a aplicação prática, mostrado na Figura 5.4

Figura 5.4: Imagem do experimento em sala de aula



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados:

4 Cones de
plástico

Uma faca, e palitos
de churrasco de madeira

Papel ofício ou cartolina e
pincel atômico

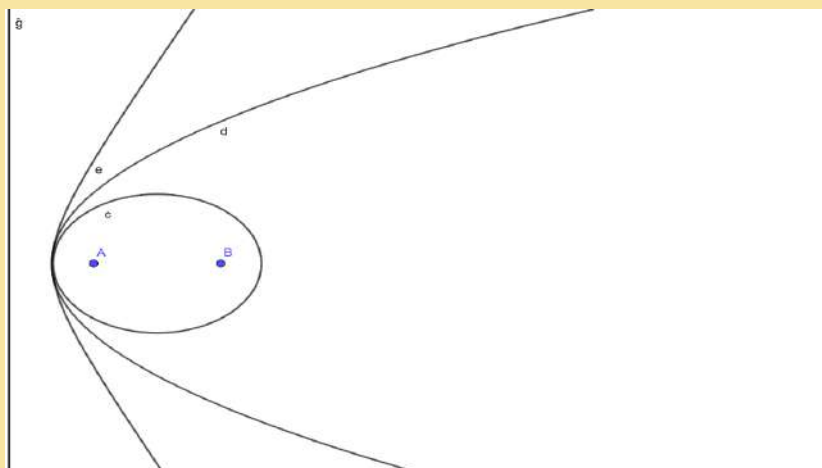
Transferidor



Uso de software para identificar as curvas

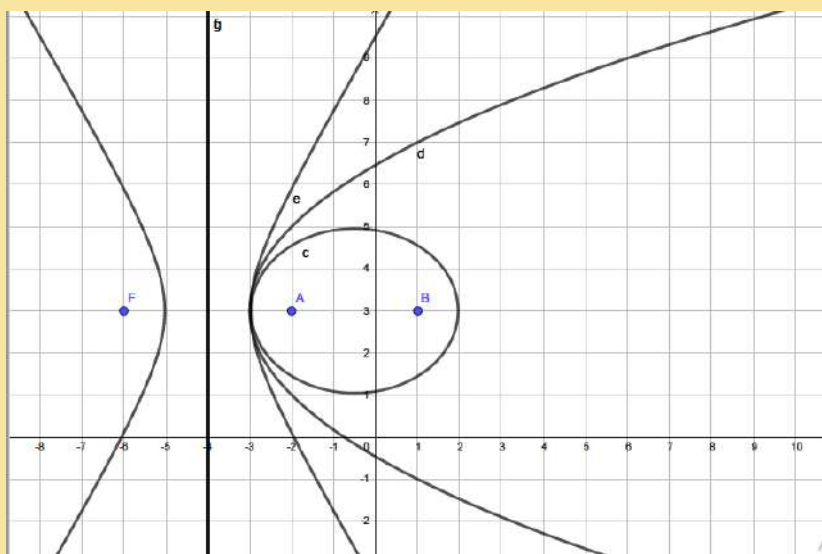
Nesse experimento usaremos dois softwares, o Geogebra e o Universe SandBox. Com o primeiro construiremos, as cônicas utilizando um mesmo ponto como foco, e uma mesma reta diretriz, assim definiremos as diferenças entre as mesmas, trazendo uma aplicação prática ao conceito definido na equação geral das cônicas e exposto na Figura 5.2. Mostraremos na Figuras 5.5 e 5.6, como será a aparência no Geogebra.

Figura 5.5: Ilustração das cônicas no Geogebra tendo como referência o mesmo foco no ponto A



Fonte: Obtido do Geogebra pelo autor

Figura 5.6: Ilustração das cônicas no Geogebra, utilizando a malha de marcações

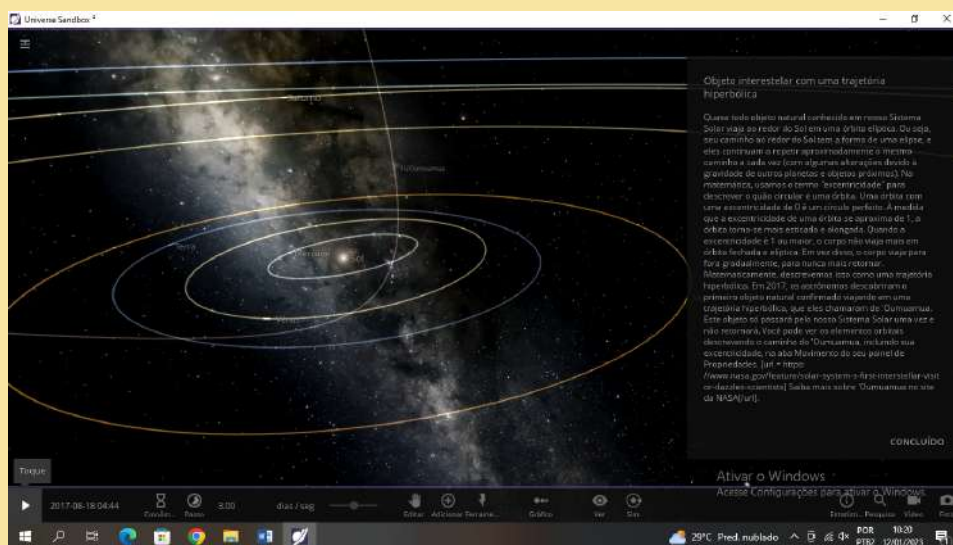


Fonte: Obtido do Geogebra pelo autor

Contextualizando com as formas descritas nas Figuras 5.5 e 5.6, mostraremos uma simulação produzida no Universe Sandbox sobre a passagem do cometa Oumumua, além de aproveitar as informações contidas sobre a curva e quando foi descoberto, como descrito na Figura 5.7.



Figura 5.7: Reprodução do Universe Sandbox da passagem do cometa Oumumua em órbita hiperbólica



Fonte: Obtido do Universe SandBox pelo autor

Materiais Utilizados:

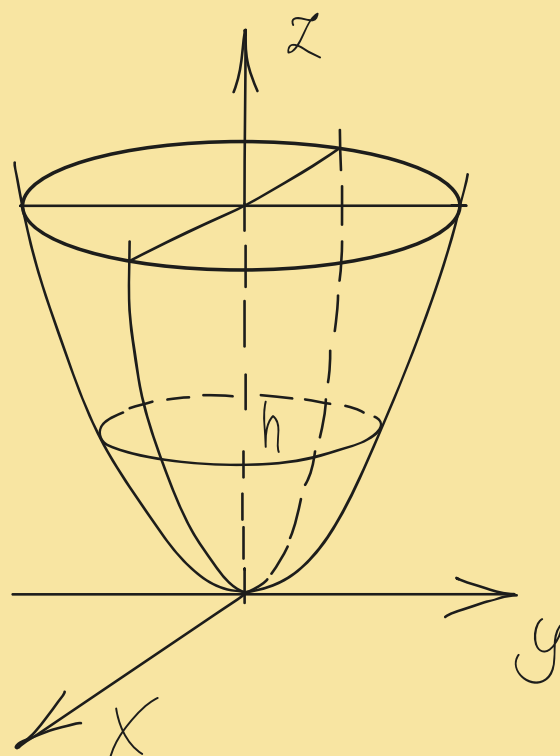
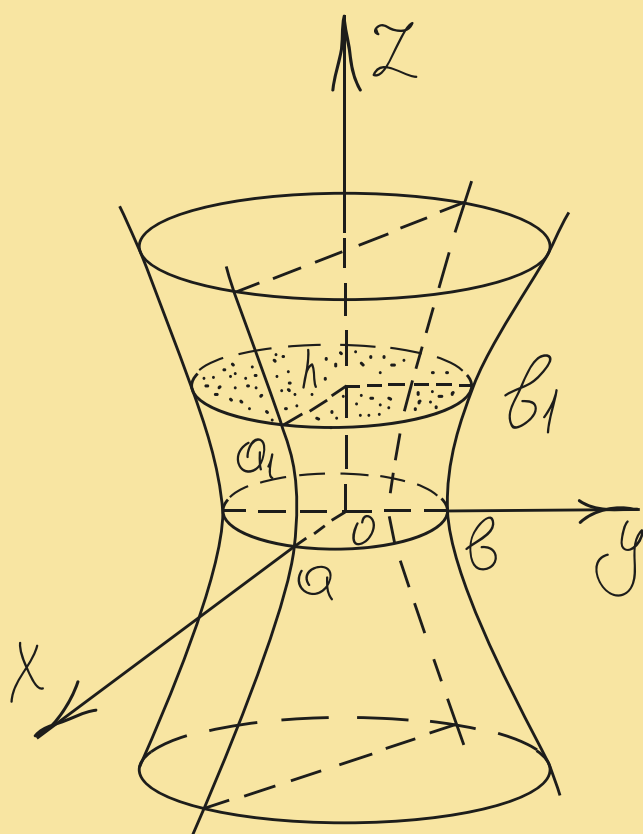
Projetor
multimídia

Computador
com internet

Software
Geogebra
instalado

Software Universe
SandBox instalado

Os procedimentos usados no Geogebra, e no Universe SandBox constam no apêndice 06.

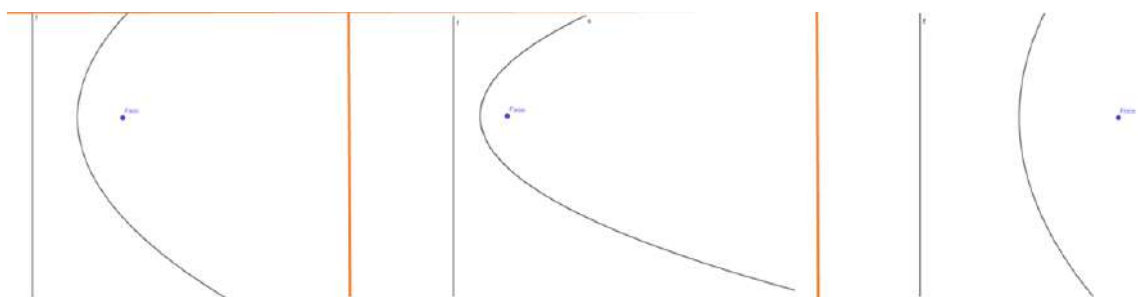


TEMA 06 – ESTUDO DA PARÁBOLA

APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

O conceito de parábola consta no planejamento de ensino de dois anos durante o Ensino Médio, no primeiro ano, quando se estuda as funções do 2º grau e no terceiro ano quando estuda as cônicas. No 1º ano o direcionamento é na construção dos gráficos parabólicos, e identificação dos elementos que o compõem, como vértice, máximos e mínimos, zeros da função. Além dos conceitos anteriores, se estuda o que cada coeficiente da equação do 2º grau ($Ax^2 + Bx + C = 0$) representa na parábola. O coeficiente C, determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas (y), o coeficiente B indica posição do gráfico em relação ao eixo y, e por fim o coeficiente A indica a relação da distância, do foco da parábola com a sua reta diretriz, porém, o conceito normalmente visto nessa série se estuda o coeficiente A, como indicação da direção de abertura do gráfico, sendo o exemplo exposto com concavidade (abertura) para cima ou para baixo. Além desse conceito destacado o mesmo coeficiente indica também o tamanho dessa abertura, mais fechada ou aberta, conforme Figura 6.1.

Figura 6.1: Representação gráfica da concavidade da parábola realizada no Geogebra



Fonte: Própria do autor

É nesse ponto que os conceitos dos dois anos se cruzam e muitas vezes o professor do 1º ano não estabelece essa relação tão importante, e que ajuda a explicar os vários exemplos de curvas parabólicas existentes em nosso cotidiano, desde faróis de automóveis, antenas de TV, lentes corretivas para visão humana(óculos), construções de pontes, lançamentos balísticos, assim como os exemplos que relacionam como a Astronomia, como lentes ou espelhos parabólicos para o desenvolvimento de telescópios como o James Webb, fogão solar, estudo de órbitas de cometas não periódicos que se aproximam-se uma única vez do Sol e retornam ao espaço interestelar.

Dessa maneira é importante que desde o primeiro ano o aluno já conheça o conceito básico da parábola, que descreve como “um conjunto de pontos em um plano que não pertencem a reta diretriz d, e nem ao foco, que equidistam de F e d”, e sua relação direta como as funções do 2º, mostrando que os conteúdos matemáticos estão ligados entre si.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

**COMPETÊNCIA
ESPECÍFICA
03**

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

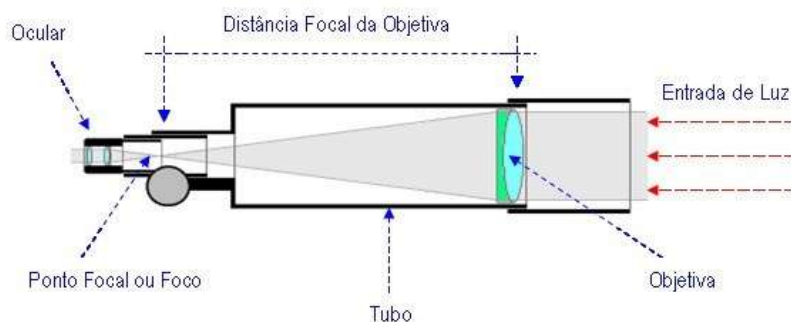
No contexto da Astronomia buscaremos a interdisciplinaridade com os conceitos físicos da óptica, mostrando a importância da parábola no desenvolvimento de lentes, para a luneta de Galileu Galilei que aperfeiçoados são conhecidos hoje como telescópios refratores, e mais tarde com a utilização de espelhos parabólicos para os telescópios de Isaac Newton, conhecidos refletor.

Hans Lippershey (1570-1619), alemão, fabricante de lentes, foi o primeiro a registrar um projeto de luneta, tornando este invento disponível para uso geral em 1608. Em 1609, Galileu Galilei constrói uma luneta e aponta para o céu. Este acontecimento marcante, mudou o curso da astronomia na época.

Com o advento da luneta, pode-se comprovar que alguns conceitos da teoria geocêntrica estavam errados. Observando a Lua, Galileu percebeu crateras e montanhas, mostrando que não era uma esfera perfeita, observando Júpiter ele percebeu a órbita de 4 luas, IO, EUROPA, GANIMEDES e CALISTO, mostrando que não são todos os corpos que orbitavam diretamente a Terra, e outra descoberta importante na época foram as fases do Planeta Vênus, similares a nossa Lua, mais uma vez mostrando o contraditório em relação ao geocentrismo.

A luneta de Galileu é formada por uma lente parabólicas funcionando como a objetiva (Convergente) e uma lente divergente servindo como ocular, conforme esquema na Figura 6.2.

Figura 6.2: Ilustração de um telescópio refrator



Fonte: <http://vaztolentino.com/secao/5-Sobre-Telescopios>

Esse tipo de telescópio é fácil de construir, existindo vários tutoriais na internet e utilizando diversos materiais. Na Figura 6.3, mostra a luneta construída pelo autor em uma das disciplinas do curso de mestrado MPASTRO/UEFS.

Figura 6.3: Luneta artesanal de cano PVC



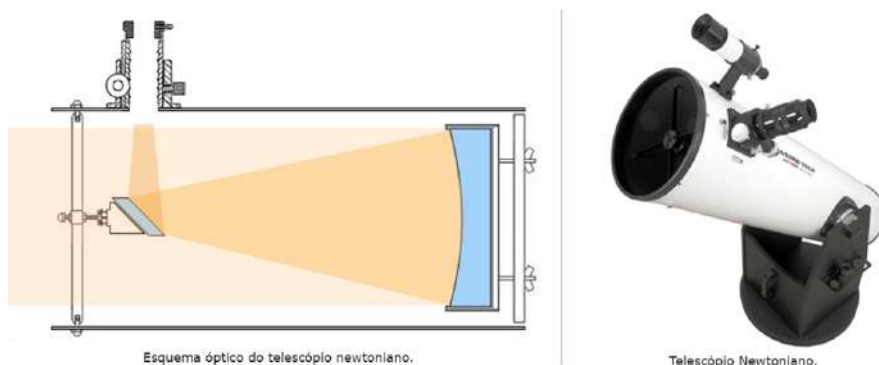
Fonte: Própria do autor



Esse modelo de telescópio refrator perdurou por muito tempo e foi bastante importante para o desenvolvimento da Astronomia, porém esse tipo de instrumento traz alguns problemas, tais como, aberração cromática que é a formação de cada cor em um foco diferente, fazendo com que a imagem fique desfocada, e a construção de equipamentos com lentes grandes, que devido ao peso e a necessidade de uma distância focal cada vez maior.

Pensando em resolver esses problemas surge o telescópio refletor, em que se substitui a lente por espelhos. A ideia da convergência de espelhos parabólicos, remonta desde a antiguidade com a lenda do matemático grego Arquimedes, que teria incendiado navios romanos utilizando um grande espelho côncavo. Ele teria conseguido concentrar a luz do Sol nas embarcações, incendiando-as. Se de fato isso realmente ocorreu não se tem certeza, mas as propriedades matemáticas da parábola do exemplo ajudaram Isaac Newton a desenvolver o telescópio refletor (Newtoniano) por volta de 1680, em que se utilizava espelhos e não mais lentes como uma maneira de consertar o problema da aberração cromática na época, conforme modelo na Figura 6.4.

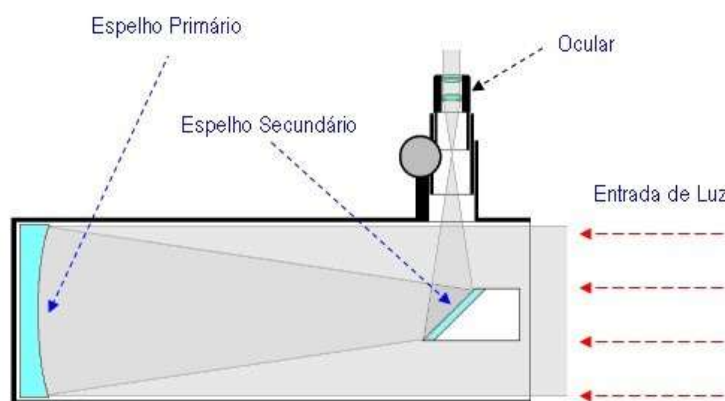
Figura 6.4: Representação do caminho percorrido pela luz no telescópio refletor



Fonte: http://www.if.ufrgs.br/~dpavani/FIS02008/AULAS/2011_1_ciclo2/telescopios_pp-Andrea-2.pdf

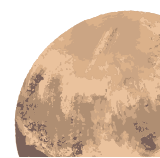
Newton usou um espelho de metal curvo (espelho primário) para captar essa luz e refleti-la para o foco. Esses telescópios utilizam um espelho primário côncavo parabólico, posicionado na traseira do tubo, para coletar a luz e formar a imagem. No telescópio Newtoniano, a luz é refletida de volta para um pequeno espelho inclinado em 45° (espelho secundário), posicionado na parte frontal do tubo, que desvia a luz para uma abertura lateral do tubo, onde fica a ocular, conforme modelo na Figura 6.5.

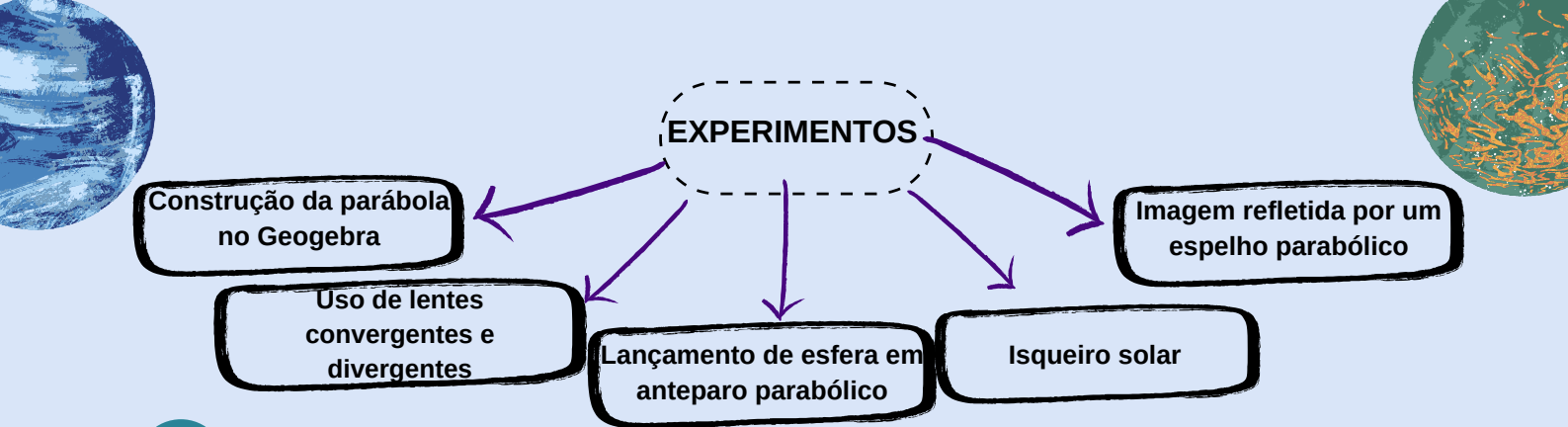
Figura 6.5: Ilustração de um telescópio refletor



Fonte: <http://vaztolentino.com/secao/5-Sobre-Telescopios>

Para estabelecer as relações interdisciplinares dos tópicos apresentados na Astronomia com os conceitos matemáticos da parábola no ensino médio, propomos aplicação de cinco experimentos.

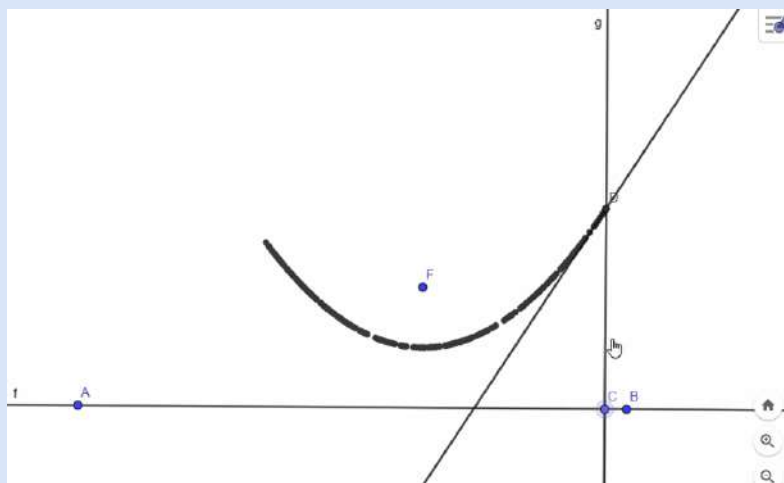




Construção da parábola usando o Geogebra

Esse experimento consiste em demonstrar geometricamente que quaisquer pontos da parábola tem a mesma distância entre o foco e uma reta diretriz. Para isso usamos o conceito da reta mediatriz entre os pontos da parábola e da reta diretriz, e como resultado temos um conjunto de pontos de mesma distância com formato de uma parábola, como mostrado na Figura 6.6.

Figura 6.6: Construção da parábola no Geogebra



Fonte: Obtido do Geogebra pelo autor

Materiais Utilizados:

Projeto
multimídia

Computador

Software Geogebra
instalado

Uso de lentes convergentes e divergentes

Nesse experimento tentamos mostrar como Galileu utilizou as lentes parabólicas para desenvolver as ampliações necessárias para observar os astros. Para isso usamos um kit de ótica que algumas escolas possuem, ou pode ser comprado na internet a um preço acessível. Nessa data específica alguns modelos variam entre R\$16,00 e R\$60,00 e lasers pequeno que custaram R\$ 6,00 cada, como descrito na Figura 6.7.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Figura 6.7: Representação da refração de lasers paralelos em lentes convergentes e divergentes



Fonte: Própria do autor

Esse experimento é muito simples de se realizar, tendo em mãos as lentes, você precisa de três lasers colocados de forma paralela, assim simulando a luz que chega ao telescópio refrator, e percebe-se o caminho dessa luz quando atravessa a lente convergente, indo para um mesmo ponto, e divergente se distanciando uma da outra, conforme Figura 6.8.

Figura 6.8: Demonstração prática do experimento



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados:

Kit de ótica com lentes divergente, convergente e plana

Três lasers colados em uma base de papelão

Três abraçadeiras de plástico

Lançamento de esfera em anteparo parabólico

Esse experimento consiste no lançamento de uma esfera em uma superfície de anteparo parabólico e um furo que simula o foco dessa parábola. O objetivo é mostrar a propriedade física de reflexão de uma superfície parabólica. Para isso, realizam-se vários lançamentos em posições paralelas de uma esfera ou gude, de modo a formar um ângulo perpendicular a reta diretriz do sólido construído. Esse experimento buscar mostra que ao lançarmos as esferas simulando os raios de luz paralelos, ele são refletidos para o foco da parábola, conforme Figura 6.9.

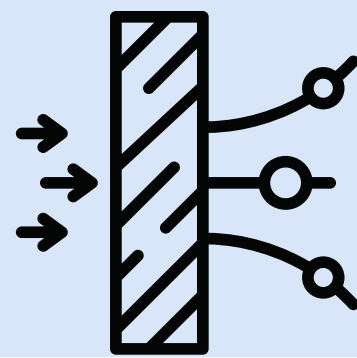
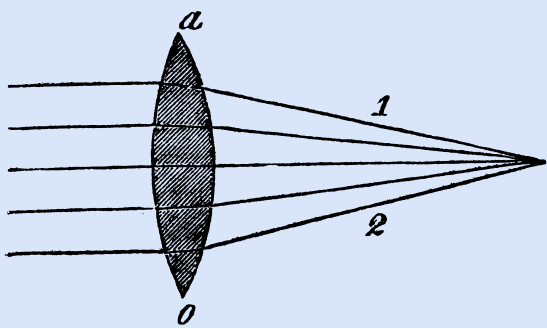


Figura 6.9. Imagem de uma parábola no MDF em que simula os raios paralelos



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados:

Esfera de metal ou gude

Base de madeira ou MDF

Serra tipo Tico tico

Furadeira com serra copo

Isqueiro solar

Nesse experimento mostramos a propriedade de reflexão do espelho parabólico, para isso usamos um isqueiro solar que é vendido na internet também como preços acessíveis entre R\$ 25,00 e R\$ 35,00. Na Figura 6.10, percebe-se a reflexão da luz solar na superfície parabólica, e na Figura 6.11, concentramos essa luz no foco e incendiamos um papel posto nesse foco da parábola, demonstrando assim que todos os pontos refletidos pela parábola convergem para o foco.

Figura 6.10: Focalizando o Sol



Figura 6.11: Incendiando o papel com calor do Sol



Fonte: Própria do autor

Materiais Utilizados:

Isqueiro solar

Um chumaço de papel ou algodão

Formação da imagem refletida por um espelho parabólico:

Nesse experimento, calculamos a distância focal, ou seja, a distância entre o espelho e o foco, pois nesse ponto a imagem será refletida, e ela determina também o tamanho de um telescópio Newtoniano refletor. Para isso usaremos um espelho parabólico (grau/ aumento), para refletir a imagem de uma vela em uma papel branco localizado ao seu lado. Em seguida, ao movimentar espelho aproximando ou afastando, percebemos a ampliação e distorção da imagem até se chegar na distância focal e perceber a imagem mais nítida, porém com formato da imagem invertida, conforme Figura 6.12.

Figura 6.12: Imagem do experimento da distância focal de um espelho côncavo



Fonte: Própria do autor

Esse experimento consiste em colar um papel ofício em uma caixa de sapato ou papelão, e paralelo ao papel acender uma vela. O aplicador fica em frente aos dois objetos citados com o espelho parabólico.

Será observado uma reflexão da luz da vela no papel, porém o tamanho e a nitidez da imagem vão depender da distância entre os objetos e o espelho, o que chamamos de distância focal, a imagem será nítida quando localizarmos esse ponto, assim com o auxílio de uma fita métrica podemos calcular, o tamanho possível de um telescópio se utilizar aquele respectivo espelho. O interessante nesse experimento é poder relacionar também com os aspectos físicos da ótica, como a representação geométrica do caminho da luz refletida por um espelho côncavo.

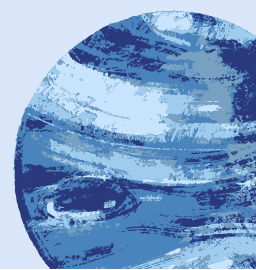
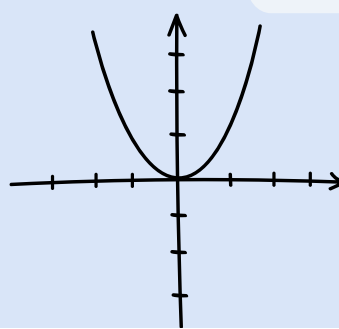
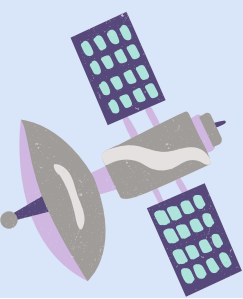
Materiais Utilizados:

Um espelho côncavo

Uma vela e fósforos

Uma caixa de sapato ou papelão

Uma folha de papel ofício e uma fita métrica



TEMA 07 – ESTUDO DA ELIPSE

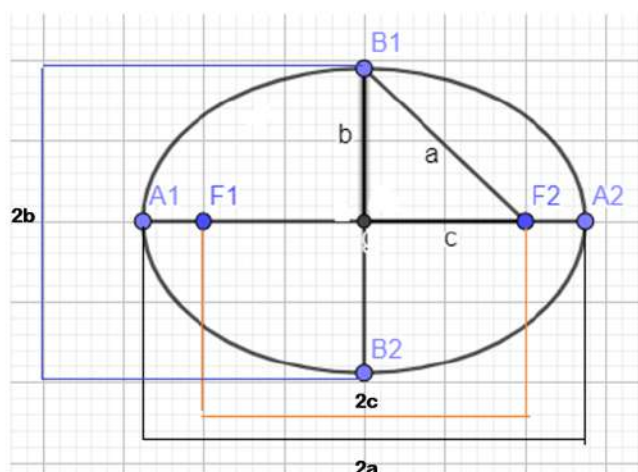
APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA

O estudo das cônicas surgiram de forma teórica, como vários conceitos matemáticos, para depois surgir a necessidade de aplicá-las a problemas cotidianos. Apesar da sua importância e aplicabilidade, o estudo da elipse se apresenta dentro das cônicas como um estudo de geometria analítica no ensino médio.

A elipse, por definição, é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Outra definição matemática é se uma cônica μ é uma elipse de focos F_1 e F_2 , então $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = k$, para todo ponto $P \in \mu$. Em que k é uma constante real. A trajetória descrita por este por essa curva é fechada, e se assemelha a uma circunferência, porém apenas quando os focos coincidem é de fato a circunferência.

Nesse contexto é importante destacar os elementos da elipse, apenas para construções matemáticas, mais também para entender a nossa temática com a relação com a Astronomia, como mostrado na Figura 7.1.

Figura 7.1: Descrição geométrica dos elementos da elipse



Onde:

- F_1 e F_2 são os focos
- A distância focal é igual a $2c$
- O comprimento do eixo maior é $2a$
- O comprimento do eixo menor é $2b$
- Os pontos A_1 , A_2 , B_1 e B_2 são os vértices

Fonte: Obtida do Geogebra pelo autor

Além desses elementos citados, vamos destacar dois conceitos importantes, o primeiro é a excentricidade da elipse que é responsável pela forma da elipse, é comum se verificar quando a maioria das pessoas desenham uma elipse, sem se preocupar com os pontos destacados anteriormente, o fazem bastante excêntrica, ou seja, alongada no eixo maior e curta no eixo menor, mais nem todas as elipses tem essa forma, um exemplo é a elipse da órbita do planeta Terra que se aproxima de uma circunferência por ter excentricidade de 0,017. Essa relação entre o semi-eixo maior (a) e a distância focal (c) da elipse, chamada de excentricidade, e tem como definição a razão entre a distância do centro da cônica e qualquer um dos focos (c) e o semi-eixo maior (a), descrita na expressão $e=c/a$, sendo relação estabelecida pelo triângulo retângulo da figura 7.1.

Elipses com excentricidade próxima de zero têm os semi-eixos com comprimentos próximos, $a=b$, se aproximando de uma circunferência, e elipses com excentricidade próxima à 1 têm uma forma alongada, com b próximo de 0.

Outro conceito importante é o semi-latus rectum, que é segmento de reta que liga cada foco a um ponto da elipse, sendo perpendicular ao eixo principal.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 05

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADE (EM13MAT509)

Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

CONTEXTO DE RELAÇÃO COM A ASTRONOMIA

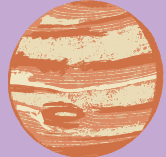
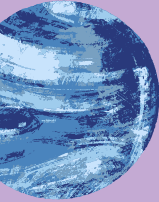
Para relacionar a elipse com a Astronomia temos que percorrer a história de Johannes Kepler e suas três leis dos movimentos planetários. Kepler foi um astrônomo, astrólogo e professor de matemática. Começou a lecionar na Universidade de Graz, na Áustria, quando escreveu sua primeira obra, *Mysterium Cosmographicum* (Mistério Cosmográfico), em 1597.

Sem muito sucesso no mundo acadêmico, ele foi convidado a trabalhar como matemático para o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, detentor das mais precisas observações dos astros na sua época. Porém, Tycho não deixava que Kepler tivesse contato com a maioria delas, isso somente aconteceu com o seu falecimento, e assim de posse dos dados, Kepler desenvolveu a sua primeira lei, chamada lei das órbitas, onde afirma que a órbita dos planetas que giram em torno do Sol não é circular, mas sim elíptica. Além disso, o Sol sempre ocupa um dos focos dessa elipse.

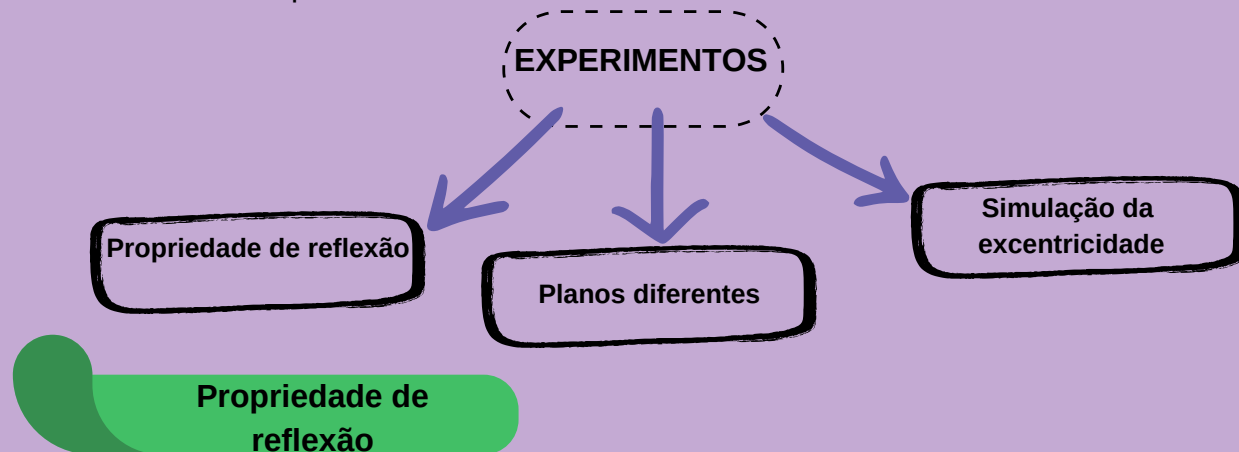
Veremos no tópico de experimentos que os planetas têm órbitas quase circulares, devido a excentricidade se aproximar de 0, e os cometas periódicos órbitas mais achatadas quando se aproximam de excentricidade 1. Além dessa primeira lei, Kepler desenvolveu mais duas, sendo a segunda, chamada lei das áreas, que estabelece num referencial fixo no Sol, a reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Essa lei mostra que as velocidades dos planetas não são constantes como seria se as órbitas fossem circunferências, sendo mais rápida quando se aproxima do Sol (periélio) e mais lenta quando está mais afastado do Sol (afélio), sendo uma consequência direta da 1ª lei.

A terceira lei de Kepler chamada lei harmônica ou dos períodos, estabelece que em um referencial fixo no Sol, o quadrado do período de revolução (T) de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse (a) que representa a órbita do planeta. $T^2 = ka^3$. Mais uma vez a lei corrobora com a ideia de que os movimentos planetários são elípticos. Uma curiosidade interessante sobre as três leis de Kepler, é que elas foram demonstradas tempos depois por Isaac Newton, e para isso ele teve de desenvolver conceitos inéditos, entre eles o cálculo diferencial e integral, as suas três leis para o movimento e a lei de gravitação universal.

Para além das trajetórias dos planetas e cometas periódicos ao redor do Sol, a elipse também é utilizada na órbitas dos satélites ao redor da Terra, cruciais para a comunicação que temos hoje.



A elipse, é a cônica que mais estudamos na escola, mesmo sem saber suas definições, e isso graças ao ensino de Astronomia em outras áreas do conhecimento, como geografia e ciências, no campo de estudo dos movimentos planetários. Vamos aproveitar esse conhecimento prévio dos alunos para ajudar a compreender a importância da excentricidade em cada órbita dos planetas do sistema solar, e utilizando os experimentos para mostrar que as órbitas não são achatadas como se costuma desenhar quando solicitado e nem circular.



Aproveitando o contexto de definição da elipse, esse experimento destaca a propriedade física refletora dessa cônica, no qual se descreve que se uma fonte de luz ou som é colocada ao mesmo tempo no foco de uma superfície com seções transversais elípticas, então toda a luz ou som é refletido da superfície para o outro foco. No experimento construímos uma elipse de madeira (ver Figura 7.2) , e usando uma pequena esfera (gude), para simular o movimento de reflexão da elipse, direcionando a esfera de um foco para ser refletida em direção ao outro foco, conforme Figura 7.2.

Figura 7.2: Imagem dos alunos realizando o experimento de reflexão da elipse.



Fonte: Própria do autor

Materiais utilizados:

Base de madeira
ou MDF

Serra do tipo
Tico tico

Furadeira com
serra copo

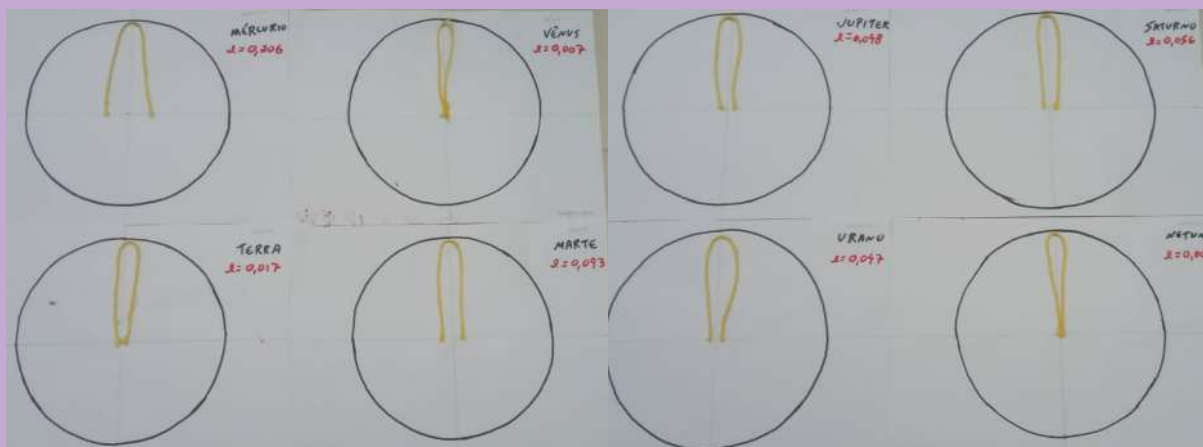
Pedaço de
emborrachado



Planos diferentes:

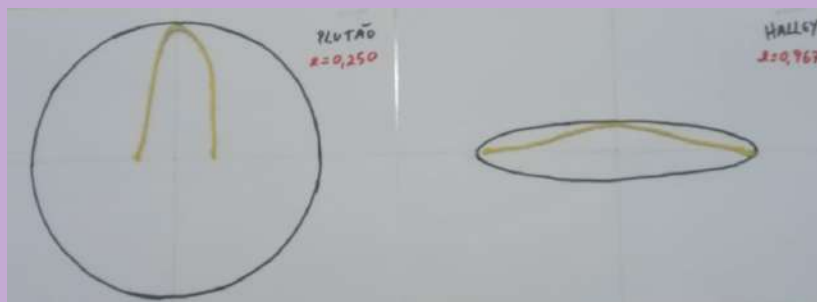
Vamos propor a representação de uma elipse para cada órbita de cada planeta do nosso sistema solar (Ver Figura 7.3), bem como do planeta anão Plutão e do cometa Halley (Ver Figura 7.4), para isso adotaremos um único valor para o semieixo maior, e em uma cartolina desenhamos a elipse pelo método do jardineiro, que consiste em fixar pinos nos focos e amarrar uma corda ou barbante em cada um deles. E depois de esticá-los, realizar um movimento circular de modo a formar uma elipse, como mostrado nas Figuras 7.3 e 7.4.

Figura 7.3: Construção da órbita dos planetas no nosso sistema solar usando o método do jardineiro



Fonte: Própria do autor

Figura 7.4: Construção da órbita de Plutão e do cometa Halley usando o método do jardineiro



Fonte: Própria do autor

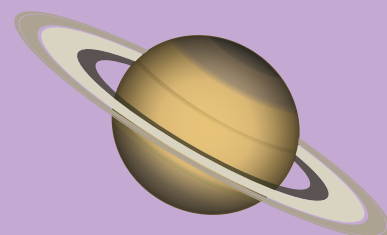
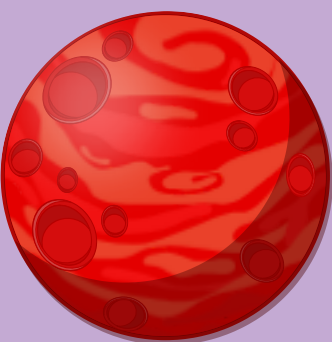
Materiais Utilizados:

10 folhas de papel
ofício, tesoura e régua

10 barbantes
ou linhas cortadas
em 10cm

Cola quente ou
alfinete para
prender o barbante

Pincel atômico
para
contorno da órbita



Simulação da excentricidade

Para esse experimento vamos simular a variação da excentricidade da órbita da Lua em relação a Terra, exemplificando assim a 2ª lei de Kepler sobre a lei das áreas. Iniciamos a simulação utilizando a distância de aproximadamente 60000km entre a Terra e a Lua, sabemos que a distância média entre eles é 3 vezes maior, porém para uma melhor visualização no software escolhermos o valor citado. A figura 7.5, mostra a órbita descrita pela Lua no experimento, e no software quase não se percebe variação em sua velocidade durante a trajetória.

Figura 7.5: Simulação da órbita da Lua em relação a Terra



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Em seguida aumentamos a excentricidade dessa órbita, e nela pode-se perceber uma variação da velocidade da Lua entre o perigeu e o apogeu. Como previsto na lei de Kepler, conforme figura 7.6 O interessante dessa simulação é verificar o que poderia acontecer se continuar a aumentar a excentricidade dessa órbita?

Figura 7.6: Simulação da órbita da Lua em relação a Terra com aumento da excentricidade



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Como resposta à pergunta descrita, seguimos aumentando a excentricidade da órbita até um ponto que a força de gravitacional da Terra, tivesse tanta intensidade que fez com que a Lua se desintegrasse conforme Figura 7.7.



Figura 7.7: Simulação da interação da força gravitacional na Lua



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

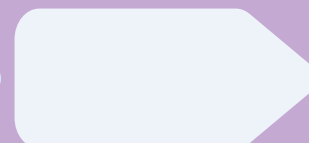
Nesse experimento buscamos mostrar a aplicação das duas primeiras leis de Kepler, relacionando o fator da excentricidade para o formato da elipse, bem como os efeitos que poderiam mesmo que fictícios serem causados pela variação da excentricidade da órbita, seja da Lua ou de quaisquer outros objetos ou astros.

Materiais Utilizados:

Projektor
multimídia

Computador com
software
Geogebra instalado

Computador com
software
Universe SandBox
instalado



Os procedimentos usados no Geogebra, e no Universe SandBox constam no apêndice 08.



APÊNDICES

APÊNDICE 01

Para construção do teodolito caseiro, usaremos os materiais listados:

- Um transferidor de meia volta
- Um pedaço de barbante
- Uma borracha, lapiseira, outro objeto para contrapeso
- Tesoura
- Palito de churrasco ou canudo
- Fita adesiva

Figura 8.1: Materiais para construção do teodolito caseiro



Fonte: Própria do autor

1º passo: Cole o canudo ou palito de churrasco (sem a ponta) no transferidor, pode ser feito utilizando fita adesiva ou cola quente, de modo que o palito fique como uma terço que liga o 0º ao 180º.

2º passo: Corte um pedaço de linha ou barbante, cerca de 20cm e amarre um contrapeso, pode ser uma pedra, uma borracha, ou uma lapiseira.

3º passo: Cole a ponta do barbante que não foi amarrada ao contrapeso no ponto central do transferidor, ponto que se localiza o vértice do ângulo medido. E está pronto seu teodolito

Procedimentos usados no Stellarium:

Materiais Utilizados para Realização do Experimento:

- Projetor multimídia
- Computador com internet, ou com o software Stellarium instalado

O software Stellarium é gratuito e destinado a simulações e estudos sobre a Astronomia, ele pode ser instalado no computador, baixar em (<https://stellarium.org/pt/>) ou uso da versão online em (<https://stellarium-web.org/>). Para o nosso experimento realizamos o seguinte. Após a abertura do programa, faremos a aplicação de duas funções para a realização do experimento, a primeira é travar o tempo e localizar o dia e a hora.

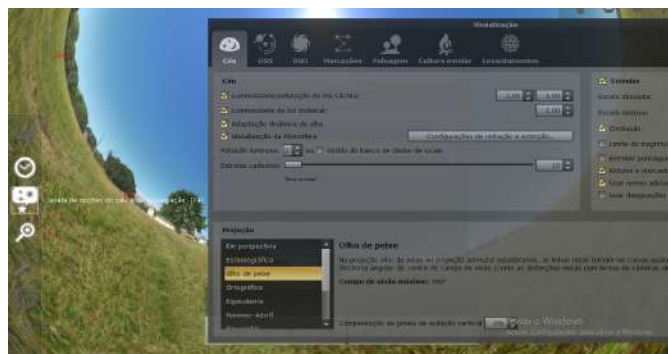
Figura 8.2: Interface do software Stellarium



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

Depois vamos colocar o horário de meio dia, e programar a visualização para olho de peixe.

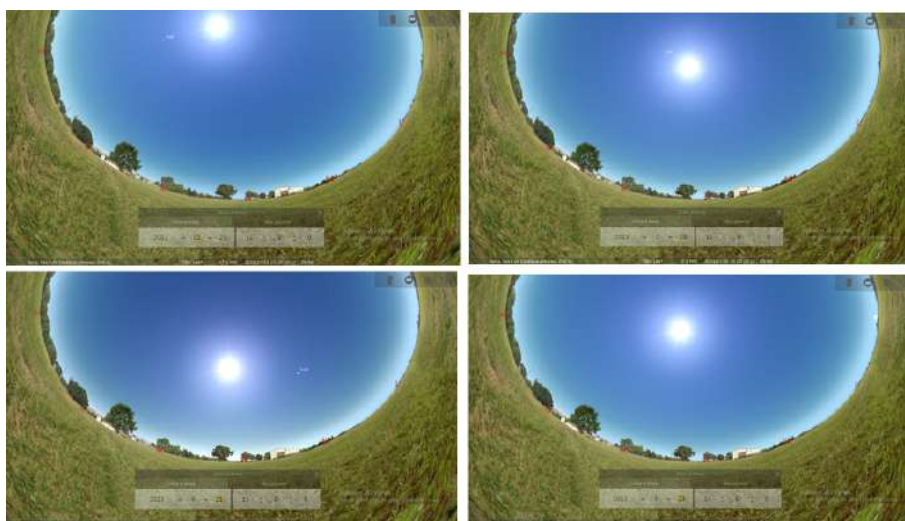
Figura 8.3: Comando para visualizar o olho de peixe



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

E finalmente, mudamos as datas para o início de cada estação do ano, verão 21/12/2022, outono 20/03/2023, inverno 21/06/2023 e primavera 23/09/2023.

Figura 8.4: Visualização da altura do Sol em cada estação do ano



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

A ideia é projetar cada uma das imagens e marcar a posição do Sol no quadro ou papel metro na parede.

APÊNDICE 02

Materiais Utilizados para Realização do Experimento:

- Projetor multimídia
- Computador com internet, ou com o software Stellarium instalado

Para realização vamos utilizar novamente o software Stellarium, e realizar nele alguns comandos, primeiro, marcar a grade equatorial, em seguida, procurar uma localização no hemisfério norte de modo que se possa visualizar a estrela Polaris, nesse caso marcamos a cidade de Albany (New York).

Figura 8.5: Localização da estrela Polaris



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

Após a localização do observador, vamos procurar a estrela Polaris na janela de pesquisa e dando um zoom na tecla do computador Pg Up, conseguimos ver que a referida estrela está bem próximo do polo norte celeste.

Figura 8.6: Comando para buscar o polo norte celeste



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

A partir desse ponto, mudaremos a data inicialmente em mil anos, indo para 3023, e posteriormente mais dois mil anos chegando a 5023, e perceberemos que a estrela Polaris se afasta cada vez mais do polo celeste norte, dando lugar a outras estrelas a serem tomadas como referencial para esse polo.

Figura 8.7: Localização da estrela polaris no polo norte celeste



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

APÊNDICE 03.

Materiais Utilizados para Realização do Experimento:

Projeto multimídia

· Computador com internet, ou com o software Stellarium instalado

Esse experimento pode ser realizado a olho nu sem uso de software, porém a poluição luminosa da cidade atrapalha um pouco sua execução, nesse caso optaremos pelo uso do Stellarium para simular a relação do aparecimento das estrelas a medida que o Sol vai se pondo ao horizonte.

Para isso vamos abrir a tela principal do programa e realizar dois comandos, o primeiro mudar a localização para sua cidade, no nosso caso Feira de Santana (Bahia), depois a visualização do programa para em perspectiva, de modo que o Sol fique ao horizonte a frente.

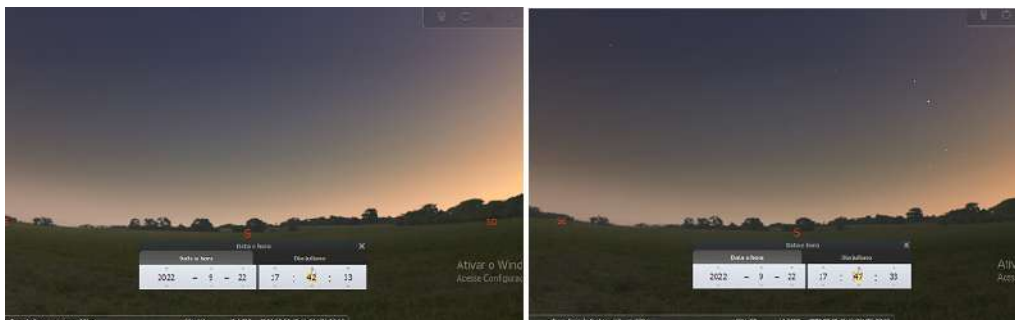
· Figura 8.8: Comando de localização da cidade e horário do pôr do Sol



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

Após esses comandos vamos alterar o horário para próximo do pôr do Sol, e aumentando os minutos até começar a visualizar as primeiras estrelas, e verificando que com o passar do tempo a quantidade de estrelas que vai aumentar e as primeiras terão mais brilho, assim repetiremos o experimento de Híparco de Samos.

Figura 8.9: Visualização das primeiras estrelas no pôr do Sol



Fonte: Obtida do Stellarium pelo autor

APÊNDICE 04

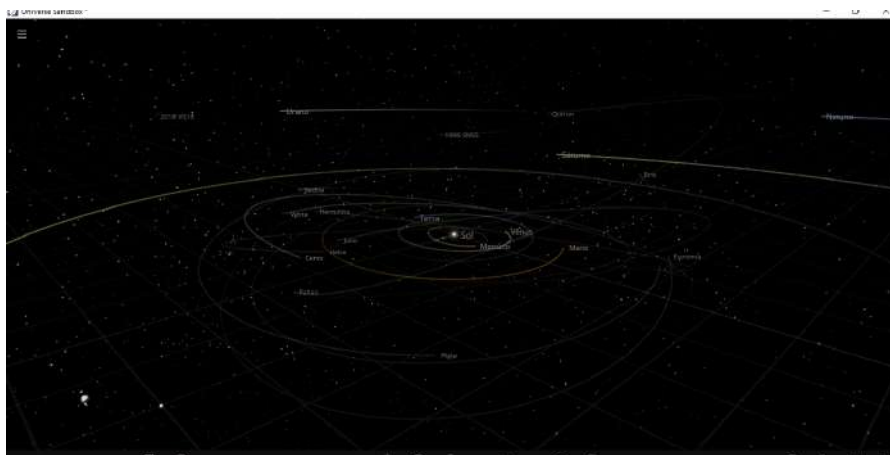
O jogo Universe SandBox, segundo o próprio site é um simulador espacial baseado em física, que mescla gravidade, clima, colisão e interações materiais, além de criar e destruir sistemas solares, supernovas. A sua interface é bastante fácil de operar e consta com inúmeras simulações já desenvolvidas, mais também com a possibilidade de o próprio jogador desenvolver a sua. Ele não é gratuito, e pode ser comprado direto no site, <https://universesandbox.com/>.

Materiais Utilizados para Realização do Experimento:

- Projetor multimídia
- Computador com o software Universe SandBox instalado.

Para esse experimento vamos utilizar a própria interface de abertura do jogo, que mostra o nosso sistema solar com as órbitas e velocidades em proporção.

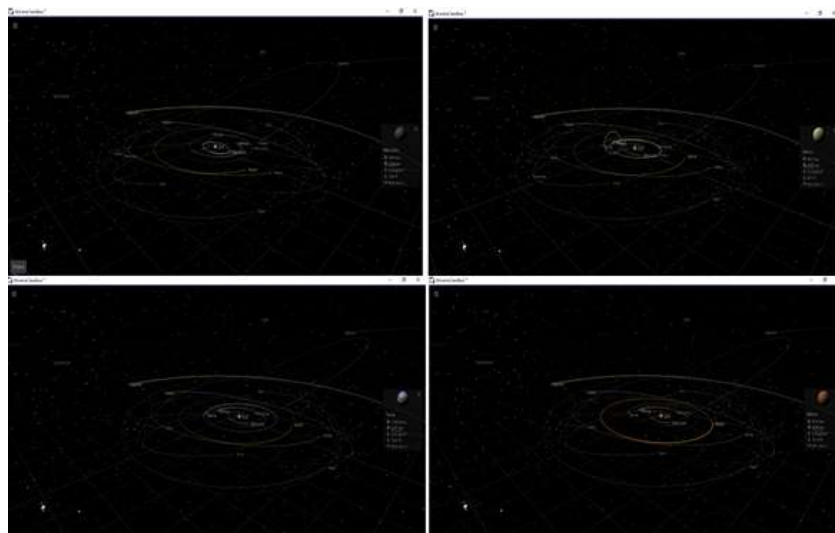
Figura 8.10: Visualização das velocidades orbitais dos planetas



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Para verificar a relação das velocidades observados por Copérnico, como foi relatado no tópico 5, basta clicar em cada Planeta, que o programa simula na tela o seu acompanhamento, Mercúrio, mais rápido, depois Vênus, Terra, até Netuno mais lento, e se percebe a diferença no movimento da tela.

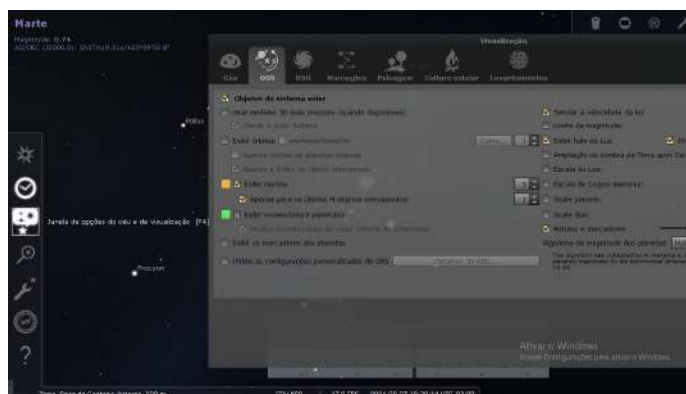
Figura 8.11: Visualização das velocidades de cada planeta



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Para mostrar a famosa laçada do planeta Marte, vamos utilizar o Stellarium, nesse caso pesquisamos a data em que Marte está retrogrado, mais próxima da nossa data atual, e encontramos 27/08/2024. Para demonstrar o movimento aparente de laçada, primeiro alteramos a data no Stellarium usando a janela de data e hora para a descrita anteriormente, e buscamos na janela de pesquisa a localização do planeta em estudo. Vamos perceber, que Marte não aparece no horizonte na projeção, sendo então necessário retirar a superfície, utilizando o atalho da tecla (G). Após esse comando, usaremos um artifício do próprio programa para mostrar o rastro do movimento do planeta, para isso utilizamos a janela de opções do céu marcando o item OSS (exibir rastro).

Figura 8.12: Comando de construção da laçada de Marte no Stellarium



Fonte : Obtida do Stellarium pelo autor

Assim variando a data veremos o rastro do movimento do planeta bem como o movimento retrogrado em forma de laçada.

Figura 8.13: Construção da laçada de Marte no Stellarium



Fonte : Obtida do Stellarium pelo autor

APÊNDICE 05

Materiais Utilizados para Realização do Experimento:

- Cones de plástico para marcação de espaço
- Uma faca para corte no cone.
- Palitos de churrasco de madeira.
- Papel ofício ou cartolina.
- Pincel atômico.
- Transferidor para medidas de ângulos.

Para construção do kit, precisamos de quatro cones de plástico, utilizados para demarcar espaços, vendidos na internet ou em supermercados. A construção é bastante simples, primeiro esquentamos um prego e fazemos um furo no centro da parte superior do cone, e colocamos um palito de churrasco que servirá de referência como reta vertical. Após a inserção do palito, usamos um transferidor para medir os ângulos referentes a cada curva. Com uma faca ou estilete, fazemos um corte em cada cone afim de obter as curvas, sendo uma parábola o ângulo de corte paralelo a geratriz do cone, para a hipérbole o ângulo de corte é paralelo ao palito, para a circunferência o corte é perpendicular ao palito, e para elipse, o ângulo varia entre as limitações para a parábola e a hipérbole.

Figura 8.14: Construção das cônicas usando um cone de plástico



Fonte: Própria do autor

APÊNDICE 06

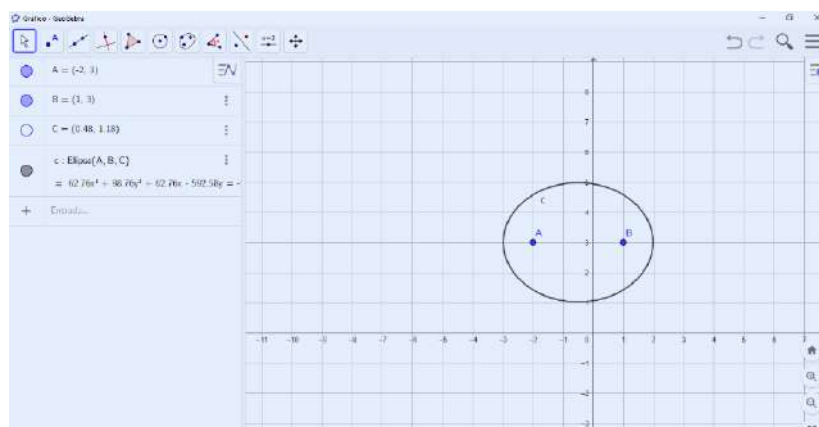
Materiais Utilizados para Realização do Experimento:

- Projetor multimídia
- Computador com internet, ou com o software Geogebra instalado.
- Computador com o software Universe SandBox instalado.

Visando a diferenciação das cônicas em abertas e fechadas e também sua relação com a excentricidade, vamos realizar um experimento simples com o software geogebra. Ele é um software matemático gratuito, e muito utilizado para o ensino de geometria. É autoexplicativo e pode ser baixado em (<https://www.geogebra.org/download>), nosso caso usaremos a versão gráfico.

1º passo: Construção da elipse, para isso estabelecemos dois pontos aleatórios para os seus focos. Escolhemos os pontos A(-2,3) e B(1,3). E selecionamos elipse com esses pontos.

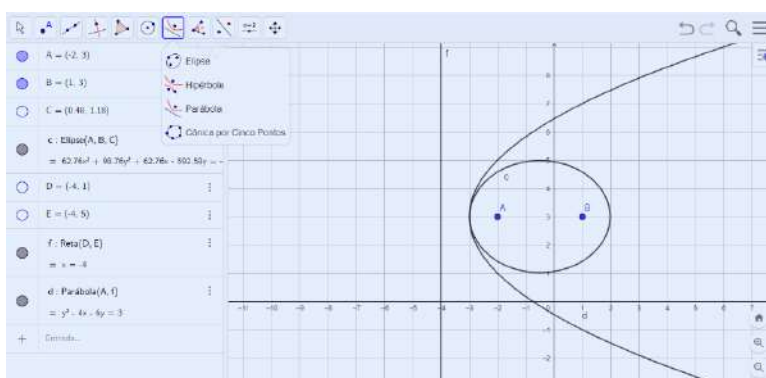
Figura 8.15: Construção da elipse no Geogebra



Fonte: Obtida do Geogebra pelo autor

2º passo: Construção da parábola, usaremos a definição que o foco é equidistante da reta diretriz, então a reta paralela ao eixo y, passando pelo $x = -4$. Depois no comando de criação de parábola selecionamos o foco de ponto A, e a reta diretriz que criamos.

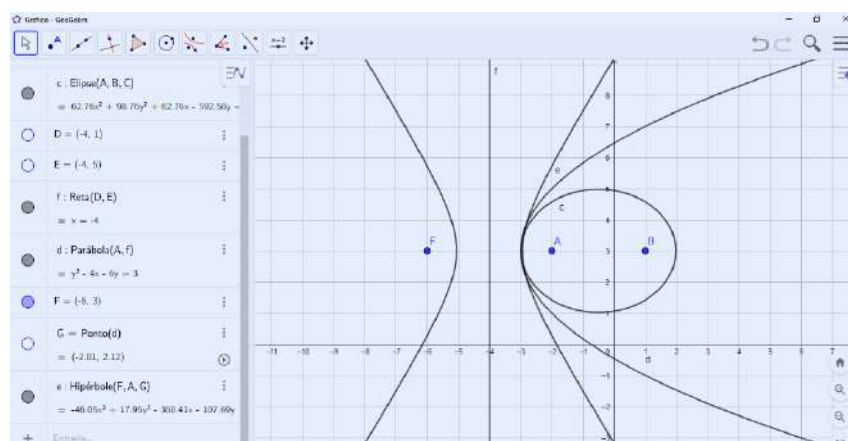
Figura 8.16: Construção das cônicas abertas no Geogebra



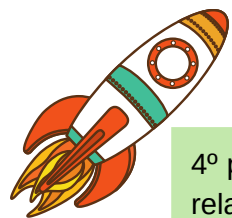
Fonte: Obtida do Geogebra pelo autor

3º passo: Construção da hipérbole, para isso vamos aproveitar um dos focos inscritos no ponto A, e utilizando a propriedade da hipérbole que os focos A e F estão equidistantes da curva hiperbólica.

Figura 8.17: Imagens das diferentes cônicas no Geogebra



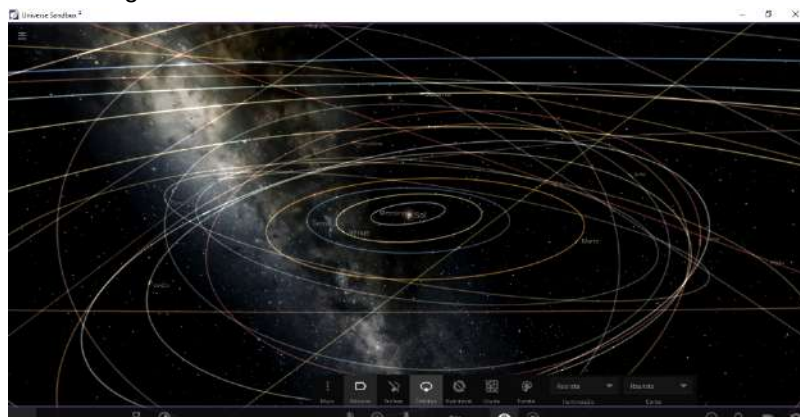
Fonte: Obtida do Geogebra pelo autor



4º passo: Refletir com os alunos sobre as distâncias de cada ponto das curvas citadas em relação ao foco, chegando assim na definição formal. E aproveitando para mostrar os movimentos de corpos celestes de órbitas fechadas e abertas, para isso utilizamos o jogo Universe SandBox, já descrito nesse trabalho.

Para esses experimentos vamos utilizar simulações prontas disponíveis no próprio jogo. Na interface de abertura do jogo podemos ver a simulação do nosso sistema solar, e com os comandos no jogo, (ver) e depois (órbitas), fica visível as elipses formadas pelos corpos que orbitam o Sol.

Figura 8.18: Interface do simulador Universe SandBox



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Para curvas abertas observaremos a simulação do cometa Oumumamua, em sua órbita hiperbólica, nesse caso usaremos os comandos, abrir simulação existente, depois objeto interestrelar com uma trajetória hiperbólica.

Figura 8.19: Interface do simulador Universe SandBox mostrando a órbita do cometa Oumumamua



Fonte: Obtida do Universe SandBox pelo autor

Ao abrir a simulação aparece no canto do vídeo algumas informações sobre o objeto celeste, como época em que foi descoberto e trajetória.



REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A.L. **Aplicações da Astronomia no ensino de Matemática na Educação Básica**, Teresina, 2013. Disponível em:

https://www.seduc.pi.gov.br/download/arquivos/biblioteca/1362077665.aplicacoes_de_astronomia_no_ensino_de_matematica_na_educacao_basica.pdf.

B KASTNER, **Space Mathematics**, Dover Publications, 2013. Disponível em <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED283721.pdf>

BENTO, HUMBERTO ALVES. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software: Geogebra**. 2010. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2010. Disponível em http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_BentoHA_1.pdf.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ensino médio** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf.

BOYER, C. B.. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: USP, 1974.

CARVALHO. H.R & NASCIMENTO, L.A. **Copérnico e a teoria Heliocêntrica: contextualizando os fatos, apresentando as controvérsias e implicações para o ensino de ciências**. Revista Latino Americana de Educação em Astronomia -n. 27, p. 7-34, 2019. Disponível em: <https://www.relea.ufscar.br/index.php/relea/article/view/362/388>.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática**. São Paulo, 1999.p.90-102.

FERNANDES, C. "**A invenção do telescópio por Galileu Galilei**"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/historiag/a-invencao-telescopio-por-galileu-galilei.htm>. Acesso em 30 de agosto de 2022.

GENUINO, LUIZ CARLOS CARNEIRO. **O uso de tecnologias no ensino de Astronomia na educação básica**. Campina Grande/PB. Universidade Estadual da Paraíba, 2014. Disponível em <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/5609/1/PDF%20-%20Luiz%20Calos%20Carneiro%20Genuino.pdf>.

GEOGEBRA: **Aplicativos matemáticos. Clássico 6**, 2022, Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>

KEPLER, S.O. e SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Departamento de Astronomia – Instituto de Física. Porto Alegre: UFRGS, 2014.



REFERÊNCIAS

LANGHI, R.; NARDI, R. **Educação em astronomia: Repensando a formação do professor**. São Paulo. Editora Escrituras, 2013.

MACHADO R. L. P. **Ressignificando o ensino e a aprendizagem da Matemática: a sala de aula como parte do cotidiano**. Rio de Janeiro 2020. Disponível em: http://www.repositoriobc.unirio.br:8080/xmlui/bitstream/handle/unirio/13197/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Raphael_Lee_Pinheiro_Machado.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

NARVAZ M.B. **Ressignificando práticas docentes numa abordagem etnomatemática**, Porto Alegre 2006. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3306/1/346805.pdf>

RODAS, H.F. **A importância da Matemática no desenvolvimento da Astronomia**, Maceió 2016. Disponível em <https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/6211/1/A%20import%C3%A2ncia%20da%20matem%C3%A1tica%20no%20desenvolvimento%20da%20astronomia.pdf>

ROSA C. A. P. **História da Ciência**, Volume II ,Fundação Alexandre de Gusmão 2ª Edição, disponível em: https://funag.gov.br/biblioteca-nova/produto/1-527-historia_da_ciencia_volume_ii_tomo_ii_o_pensamento_cientifico_e_a_ciencia_no_seculo_xix.

STELLARIUM, **Stellarium web**, Fabien Chereau e Guillaume Chereau, 2022. Disponível em: <https://stellarium-web.org/>

TEDESCO PIOVEZAN, A. C., & DAROS GAMA, L. (2019). **Astronomia e Matemática: uma proposta interdisciplinar para o Ensino Fundamental II**. São Paulo, 2019. Disponível em: <https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/32716>

UNIVERSE SANDBOX, **Versão 2.1**, Dan Dixon, 2022. Disponível em <https://universesandbox.com/>

VENTURI, JACIR J. **Cônicas e Quádricas**. Curitiba: Livrarias Curitiba, 10.ª ed. 2019.





TERMO DE VALIDAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Atestamos para os devidos fins que o produto educacional intitulado PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA CONTEXTUALIZADA NA ASTRONOMIA - MANUAL DE ATIVIDADES foi aplicado no Centro Integrado de Educação Assis Chateaubriand, em Feira de Santana - BA, em turmas de 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio, e 01 turma da EJA, com um total de 154 estudantes.

Feira de Santana, 19 de agosto de 2023

Presidente da Banca de Avaliação:
Prof. Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho (UFRB)

Membro Interno do Mestrado Profissional em Astronomia:
Prof. Dr. José Vieira do Nascimento Júnior (DEXA-UEFS)

Membro Externo – Convidado:
Prof. Dr. Odair Vieira dos Santos (UFRB)